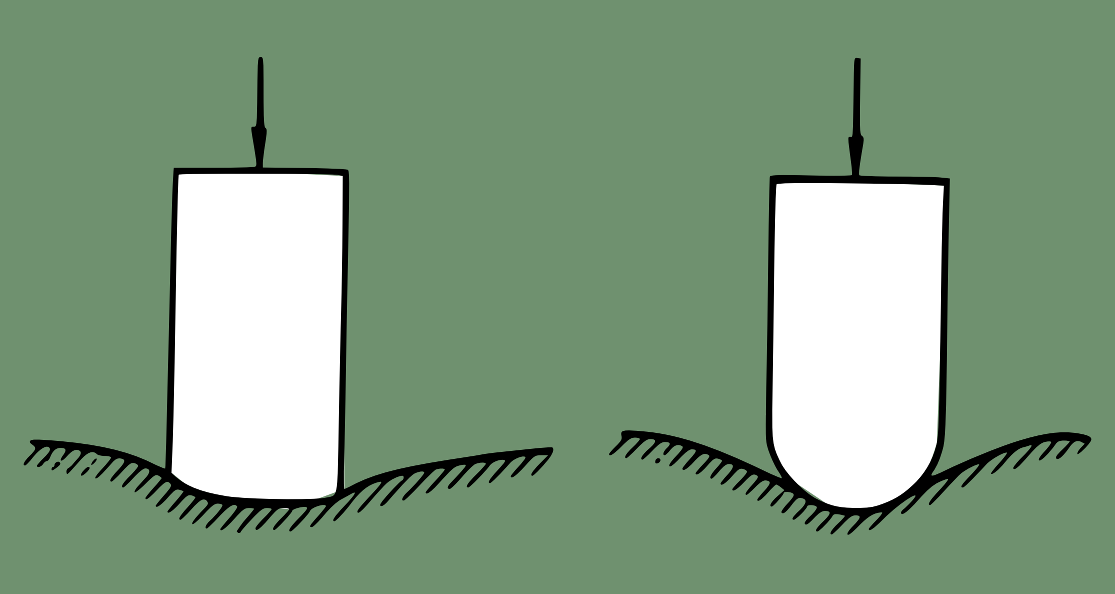
V. Parton, P. Perline

MÉTHODES DE LA THÉORIE MATHÉMATIQUE DE L'ÉLASTICITÉ

Tome 2



Éditions Mir Moscou

В. З. ПАРТОН, П. И. ПЕРЛИН

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

ТОМ 2

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА ● 1981

V. PARTON, P. PERLINE

MÉTHODES DE LA THÉORIE MATHÉMATIQUE DE L'ÉLASTICITÉ

TOME 2

ÉDITIONS MIR • MOSCOU

Traduit du russe par
Christianne Der-Megreditchian

На французском языке

TABLE DES MATIÈRES

AVANT-PROPOS

Ce second tome des *Méthodes de la théorie mathématique de l'élasticité* est consacré à l'application des méthodes mathématiques exposées au premier tome à la résolution de différents problèmes de l'élasticité. Ses cinq chapitres (par le nombre de méthodes) les présentent de façon exhaustive.

Parallèlement à l'exposé de questions théoriques générales, on donne la solution de nombreux problèmes pratiques spécialement choisis de façon à illustrer les possibilités de telle ou telle méthode concrète. Des critères de simplicité, d'élégance mathématique et d'intérêt pratique ont présidé au choix des problèmes dans la masse énorme de publications récentes. Le cadre restreint de l'ouvrage n'a pas permis de présenter ici nombre d'ouvrages forts intéressants. On espère néanmoins avoir donné au lecteur un guide qui lui facilitera l'étude de la littérature spéciale.

La présentation du matériel par méthodes mathématiques et non par problèmes de l'élasticité (flexion et torsion des barres, problème plan et tridimensionnel, etc.) nous paraît plus avantageuse, permettant ainsi de concentrer l'attention sur les particularités et les possibilités des méthodes proposées. Cette approche est en parfait accord avec le point de vue selon lequel l'élasticité serait une branche de la physique mathématique.

Soulignons que les méthodes de l'élasticité linéaire permettent souvent de venir au bout des problèmes relatifs à des milieux d'une rhéologie beaucoup plus complexe. Ainsi, par exemple, les problèmes élastoplastiques se laissent résoudre, dans le cadre de la théorie des petites déformations, par la méthode des solutions « élastiques ». L'étude des problèmes visco-élastiques peut être ramenée aux équations de l'élasticité pour les transformées. L'appareil de l'élasticité linéaire s'applique naturellement à l'étude des problèmes de l'élasticité non linéaire. Toutes ces questions, ainsi que celles concernant les problèmes de l'élasticité linéaire pour le milieu anisotrope sont exposées de façon à la fois concise et suggestive au supplément.

Dernière remarque. Dans ce second tome la numération des chapitres, dessins, tables est consécutive à celle du premier tome, la numération et les références aux formules sont naturellement effectuées comme au premier tome.

V. Parton, P. Perline
Moscou, 1982.

CHAPITRE IV

MÉTHODE DE SÉPARATION DES VARIABLES DANS LES PROBLÈMES DE L'ÉLASTICITÉ

§ 1. Problèmes de l'élasticité pour la boule et l'espace comportant une cavité sphérique

On a montré au § 10 du chapitre I que la solution du problème de Dirichlet pour une boule peut être obtenue par la méthode de séparation des variables en faisant appel aux fonctions sphériques associées. On a établi par ailleurs au § 5 du chapitre III que le problème fondamental de l'élasticité pour la boule peut être ramené aux trois problèmes de Dirichlet. Ainsi apparaît une possibilité d'appliquer directement la méthode de séparation des variables à la résolution de problèmes de l'élasticité aussi. Appliquons la méthode de séparation des variables dans le cas d'un domaine sphérique tout en utilisant les représentations de Papkovitch-Neuber. Cherchons tout d'abord la solution du problème à symétrie axiale qui permettra de construire la fonction de Green pour un chargement arbitraire.

Il a été établi au § 5 du chapitre III que les déplacements en coordonnées sphériques peuvent, dans le cas d'une symétrie axiale, être représentés à l'aide des projections d'un vecteur harmonique $\boldsymbol{\psi}(\psi_x, \psi_y, \psi_z)$ et d'une fonction scalaire harmonique φ sous la forme

$$u_r = 4(1-\nu)\psi_r - \frac{\partial}{\partial r}(r\psi_r + \varphi),$$
$$u_\theta = 4(1-\nu)\psi_\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(r\psi_r + \varphi), \tag{1.1}$$

où ψ_r et ψ_θ sont les projections du vecteur $\boldsymbol{\psi}$ sur les axes r et θ.

Servons-nous de ces représentations pour obtenir des représentations commodes (du point de vue de la résolution des problèmes aux limites) de solutions partielles des problèmes de l'élasticité concernant une boule ou un espace à cavité sphérique. Servons-nous pour l'élaboration des fonctions harmoniques indiquées de la méthode de séparation des variables. Donnons-nous un entier positif n. Etant donné la symétrie axiale, les projections du vecteur $\boldsymbol{\psi}$ sur les axes de coordonnées x et y peuvent être choisies sous

la forme (cf. § 10, ch. I)

$$\psi_x = Ar^n \cos\varphi \frac{dP_n(\cos\theta)}{d\theta},$$
$$\psi_y = Ar^n \sin\varphi \frac{dP_n(\cos\theta)}{d\theta} \tag{1.2}$$

(A = const), et la projection ψ_z sous la forme (A^* = const)

$$\psi_z = A^* r^n P_n(\cos\theta). \tag{1.3}$$

Pour les projections ψ_r et ψ_θ nous obtenons alors les représentations

$$\psi_r = r^n \left[A \sin\theta \frac{dP_n(\cos\theta)}{d\theta} + A^* \cos\theta\, P_n(\cos\theta)\right],$$
$$\psi_\theta = r^n \left[A \cos\theta \frac{dP_n(\cos\theta)}{d\theta} - A^* \sin\theta\, P_n(\cos\theta)\right]. \tag{1.4}$$

Transformons-les à l'aide des identités connues [37]

$$(\mu^2 - 1)P_n'(\mu) = n(\mu P_n - P_{n-1}), \quad \mu P_n'(\mu) = nP_n + P_{n-1}'. \tag{1.5}$$

Posant $A^* = -nA$, nous pouvons simplifier :

$$\psi_r = -nAr^n P_{n-1}(\mu),$$
$$\psi_\theta = -Ar^n P_{n-1}'(\mu) \sin\theta = Ar^n \frac{dP_{n-1}}{d\theta}. \tag{1.6}$$

La fonction φ sera choisie sous la forme

$$\varphi = -Br^{n-1} P_{n-1}(\mu). \tag{1.7}$$

Utilisant (1.6) et (1.7) on peut obtenir les expressions des déplacements et des contraintes à l'intérieur de la boule sous une forme très compacte. A des valeurs arbitraires de A et B correspondront des solutions particulières qu'on peut utiliser pour la résolution du problème aux limites à symétrie axiale pour une boule.

On peut conduire des raisonnements analogues pour un n négatif. Le résultat obtenu dans ce cas s'établit en remplaçant dans les constructions précédentes n par $-(n+1)$ et en tenant compte de l'identité $P_{-(n+1)} = P_n$. Celle-ci découle du fait que l'équation pour les polynômes de Legendre se définit par le nombre $n(n+1)$, donc est invariante par rapport au changement $n' = -(n+1)$. Les solutions particulières obtenues peuvent être utilisées pour la résolution de problèmes à symétrie axiale qui concernent l'espace comportant une cavité sphérique.

Bien entendu, la méthode de séparation des variables pourrait être appliquée directement aux équations de Lamé (en coordonnées sphériques et compte tenu de la symétrie axiale), mais la voie exposée (moyennant les représentations de Papkovitch-Neuber) s'avère plus commode.

Rapportons l'ensemble des solutions particulières, en déplacements et en contraintes, pour les problèmes intérieur et extérieur, obtenues à partir des représentations (1.6) et (1.7) [86]. Pour le problème intérieur nous avons

$$\begin{aligned} u_r &= [Ar^{n+1}(n+1)(n-2+4\nu) + Br^{n-1}n]P_n(\cos\theta), \\ u_\theta &= [Ar^{n+1}(n+5-4\nu) + Br^{n-1}]\frac{dP_n(\cos\theta)}{d\theta}; \end{aligned} \tag{1.8}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\mu}\sigma_r &= [A(n+1)(n^2-n-2-2\nu)r^n + Bn(n-1)r^{n-2}]P_n(\cos\theta), \\ \frac{1}{2\mu}\tau_{r\theta} &= [A(n^2+2n-1+2\nu)r^n + B(n-1)r^{n-2}]\frac{dP_n(\cos\theta)}{d\theta}, \\ \frac{1}{2\mu}\sigma_\theta &= -[A(n^2+4n+2+2\nu)(n+1)r^n + Bn^2r^{n-2}]\times \\ &\times P_n(\cos\theta) - [A(n+5-4\nu)r^n + Br^{n-2}]\frac{dP_n(\cos\theta)}{d\theta}\cot\theta, \\ \frac{1}{2\mu}\sigma_\varphi &= [A(n+1)(n+2-2\nu-4n\nu)r^n + Bnr^{n-2}]\times \\ &\times P_n(\cos\theta) + [A(n+5-4\nu)r^n + Br^{n-2}]\frac{dP_n(\cos\theta)}{d\theta}\cot\theta. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Pour le problème extérieur :

$$\begin{aligned} u_r &= [Cr^{-n}n(n+3-4\nu) - D(n+1)r^{-n-2}]P_n(\cos\theta), \\ u_\theta &= [Cr^{-n}(-n+4-4\nu) + Dr^{-n-2}]\frac{dP_n(\cos\theta)}{d\theta}; \end{aligned} \tag{1.10}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\mu}\sigma_r &= [-Cnr^{-n-1}(n^2+3n-2\nu) + D(n+1)(n+2)r^{-n-3}]P_n(\cos\theta), \\ \frac{1}{2\mu}\tau_{r\theta} &= [Cr^{-n-1}(n^2-2+2\nu) - D(n+2)r^{-n-3}\frac{dP_n(\cos\theta)}{d\theta}, \\ \frac{1}{2\mu}\sigma_\theta &= [Cnr^{-n-1}(n^2-2n-1+2\nu) - D(n+1)^2r^{-n-3}]\times \\ &\times P_n(\cos\theta) - [Cr^{-n-1}(-n+4-4\nu) + Dr^{-n-3}]\frac{dP_n(\cos\theta)}{d\theta}\cot\theta, \\ \frac{1}{2\mu}\sigma_\varphi &= [Cnr^{-n-1}(n+4-4n\nu-2\nu) - D(n+1)r^{-n-3}]\times \\ &\times P_n(\cos\theta) + [Cr^{-n-1}(-n+4-4\nu) + Dr^{-n-3}]\frac{dP_n(\cos\theta)}{d\theta}\cot\theta. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Désignons par $K_n^{\pm}$ et $L_n^{\pm}$, $M_n^{\pm}$ et $N_n^{\pm}$ les expressions entre crochets dans les représentations des déplacements u_r et u_θ et des contraintes σ_r et $\tau_{r\theta}$ sur la frontière, c'est-à-dire pour $r \to R$ (les signes « + » et « — » indiquent les problèmes intérieur et extérieur respectivement).

Utilisons ces représentations pour la résolution des premier et deuxième problèmes intérieur et extérieur. Dans le cas du premier problème nous supposerons donnés les déplacements

$$u_r(\theta) = u_r^0(\theta), \quad u_\theta(\theta) = u_\theta^0(\theta) \quad (r = R). \tag{1.12}$$

Dans le cas du deuxième problème, les contraintes

$$\sigma_r(\theta) = \sigma_r^0(\theta), \quad \tau_{r\theta}(\theta) = \tau_{r\theta}^0(\theta) \quad (r = R). \tag{1.13}$$

Alors, en utilisant les développements en séries suivant les polynômes de Legendre, nous pouvons tirer des conditions aux frontières (1.12) et (1.13) les coefficients inconnus :

$$\left.\begin{aligned} K_n^{\pm} &= \frac{2n+1}{2}\int_0^\pi u_r(\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta, \\ L_n^{\pm} &= \frac{2n+1}{2}\int_0^\pi u_\theta(\theta)\frac{dP_n(\cos\theta)}{d\theta}\sin\theta\,d\theta; \end{aligned}\right\} \tag{1.14}$$

$$\left.\begin{aligned} M_n^{\pm} &= \frac{2n+1}{2}\int_0^\pi \sigma_r(\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta, \\ N_n^{\pm} &= \frac{2n+1}{2n(n+1)}\int_0^\pi \tau_{r\theta}(\theta)\frac{dP_n(\cos\theta)}{d\theta}\sin\theta\,d\theta. \end{aligned}\right\} \tag{1.15}$$

Après avoir déterminé ces grandeurs, on peut calculer les coefficients A_n, B_n, C_n et D_n.

Etudions maintenant la résolubilité des systèmes d'équations algébriques obtenues. Nous allons commencer par le deuxième problème intérieur. Des deux premières formules (1.9) découle que la détermination des constantes A_n et B_n s'avère possible quand le déterminant du système est non nul. Dans notre cas l'expression du déterminant

$$-2(n-1)[n(n-1) + (1+\nu)(2n+1)]R^{2(n-1)} \tag{1.16}$$

est différente de zéro pour $n = 0, 2, 3, \ldots$, de sorte que pour ces valeurs toutes les équations doivent être résolubles. La résolubilité des équations correspondantes pour $n = 1$ doit découler de la

condition d'équilibre de la boule, nécessaire pour la position du problème aux limites. Déterminons le vecteur résultant des efforts P_z s'exerçant sur le corps (la nullité du vecteur-moment découle automatiquement de la condition de symétrie) :

$$P_z = 2\pi R^2 \int_0^{\pi} [\sigma_r^0(\theta) \cos \theta - \tau_{r\theta}^0(\theta) \sin \theta] \sin \theta \, d\theta =$$

$$= 2\pi R^2 \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-1}^{1} \{M_n \cos \theta P_n(\cos \theta) -$$

$$- n N_n^+ [\cos \theta P_n(\cos \theta) - P_{n-1}(\cos \theta)]\} d \cos \theta = 0. \quad (1.17)$$

Seul le second terme se trouve être différent de zéro, de sorte que nous obtenons

$$P_z = 2\pi R^2 \left[M_1^+ \int_{-1}^{1} \cos^2 \theta \, d \cos \theta - N_1^+ \int_{-1}^{1} (\cos^2 \theta - 1) \, d \cos \theta \right] =$$

$$= \frac{4\pi R^2}{3} (M_1^+ + 2N_1^+). \quad (1.18)$$

Par conséquent, la condition d'équilibre est équivalente à l'égalité

$$M_1^+ + 2N_1^+ = 0, \quad (1.19)$$

qui permet d'estimer l'équation résoluble pour un déterminant nul également. Compte tenu de ceci nous avons

$$A_1 = - \frac{M_1^+}{8\mu R(1+\nu)} = \frac{N_1^+}{4\mu R(1+\nu)}. \quad (1.20)$$

Le coefficient B_1 ne figure pas dans la solution (il a été introduit formellement pour l'unicité de l'écriture des expressions (1.8) et (1.9)). Si, par suite d'une erreur commise dans les calculs de M_1^+ ou N_1^+, la condition (1.19) n'est pas remplie, ceci ne doit pas être un argument pour refuser l'utilisation de la formule (1.20).

D'une manière analogue, dans le cas du problème aux limites extérieur, utilisant les deux premières formules (1.11) nous aboutissons à un système d'équations de déterminant

$$2(n+2)[(n+2)(n+1) - (1+\nu)(2n+1)]R^{-2n-1}. \quad (1.21)$$

Cette expression est différente de zéro pour $n = 0, 1, 2, \ldots$

Dans tous les cas considérés, la solution se représente sous la forme d'une série dont les coefficients sont des intégrales des conditions aux limites. En intervertissant dans ces séries les

ordres de sommation et d'intégration, il peut s'avérer possible (de même que dans le cas harmonique) de sommer les séries internes, ce qui conduira à une représentation compacte de la solution. Effectuons cette procédure conformément à [12] dans le cas du deuxième problème intérieur (les contraintes tangentielles sont supposées nulles). Servons-nous de l'égalité

$$P_n(\cos\theta)P_n(\cos\alpha) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} P_n(\lambda)\,d\psi, \tag{1.22}$$

où $\lambda = \cos(\theta+\alpha) + 2\sin\theta\sin\alpha\sin^2\psi$. Nous obtenons alors la représentation des déplacements u_r et u_θ sous forme d'intégrales doubles

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{R}{4\pi\mu}\int_0^{\pi}\sigma_r^0(\alpha)\sin\alpha\,d\alpha\int_0^{\pi/2} d\psi\left\{\sum_{n=2}^{\infty}P_n(\lambda)\times\right.\\ &\quad\left.\times\left[A_{1n}\left(\frac{r}{R}\right)^{n+1}+A_{2n}\left(\frac{r}{R}\right)^{n-1}\right]+\frac{2(1-2\nu)}{1+\nu}\frac{r}{R}\right\},\\ u_\theta &= \frac{R}{4\pi\mu}\int_0^{\pi}\sigma_r^0(\alpha)\sin\alpha\,d\alpha\,\frac{\partial}{\partial\theta}\int_0^{\pi/2} d\psi\sum_{n=2}^{\infty}P_n(\lambda)\times\\ &\quad\times\left[A_{3n}\left(\frac{r}{R}\right)^{n+1}+A_{4n}\left(\frac{r}{R}\right)^{n-1}\right]; \end{aligned} \tag{1.23}$$

$$\begin{aligned} A_{1n} &= -\frac{(2n+1)(n-2+4\nu)(n+1)}{n^2+(1+2\nu)n+1+\nu},\\ A_{2n} &= \frac{(2n+1)(n^2+2n-1+2\nu)n}{(n-1)[n^2+(1+2\nu)n+1+\nu]},\\ A_{3n} &= -\frac{(2n+1)(n+5-4\nu)}{n^2+(1+2\nu)n+1+\nu},\\ A_{4n} &= \frac{(2n+1)(n^2+2n-1+2\nu)}{(n-1)[n^2+(1+2\nu)n+1+\nu]}. \end{aligned} \tag{1.24}$$

On peut transformer les séries figurant dans (1.23) de manière à obtenir les expressions des déplacements sous forme explicite. A cette fin décomposons les fractions rationnelles (1.24) en sommes

de polynômes et de fractions rationnelles élémentaires :

$$
\begin{aligned}
A_{1n} &= -(2n+1) + 4(1-\nu) + \frac{P}{n-n_1} + \frac{\bar{P}}{n-\bar{n}_1}, \\
A_{2n} &= (2n+1) + 4(1-\nu) + \frac{2}{n-1} + \frac{Q}{n-n_1} + \frac{\bar{Q}}{n-\bar{n}_1}, \\
A_{3n} &= -2 + \frac{S}{n-n_1} + \frac{\bar{S}}{n-\bar{n}_1}, \\
A_{4n} &= 2 + \frac{2}{n-1} + \frac{T}{n-n_1} + \frac{\bar{T}}{n-\bar{n}_1},
\end{aligned}
\tag{1.25}
$$

où n_1 et $\bar{n}_1$ sont des racines conjuguées complexes de l'équation

$$n^2 + (1+2\nu)n + 1 + \nu = 0. \tag{1.26}$$

Les constantes P, Q, S et T figurant dans (1.25) ne dépendent que du coefficient de Poisson et se calculent de façon élémentaire.

Ainsi, le problème se ramène au calcul des sommes du type

$$\sum r^n P_n(\lambda), \quad \sum n r^n P_n(\lambda), \quad \sum \frac{r^n}{n-a} P_n(\lambda).$$

La valeur de la première somme est connue [11] :

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n P_n(\lambda) = \frac{1}{s}, \quad s = \sqrt{r^2 - 2r\lambda + 1}.$$

On a également les relations suivantes :

$$\sum_{n=0}^{\infty} n r^n P_n(\lambda) = r \frac{\partial}{\partial r} \sum_{n=0}^{\infty} r^n P_n(\lambda) = \frac{r(r-\lambda)}{(r^2 - 2r\lambda + 1)^{3/2}},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{n-a} P_n(\lambda) = r^a \int_0^r dr \sum_{n=0}^{\infty} r^{n-a-1} P_n(\lambda) = \int_0^1 \frac{dy}{y^{1+a}\sqrt{r^2y^2 - 2ry\lambda + 1}}.$$

La dernière intégrale pour $a = n_1$ et $\bar{n}_1$ est au facteur $1/a$ près une fonction hypergéométrique. Il est dès lors très simple de calculer les intégrales par rapport à ψ ; les représentations défini-

tives des déplacements sont alors

$$u_r(r,\theta) = \frac{R}{2\pi\mu}\int_0^{\pi} \sigma_r^0(\alpha) H_r\left(\frac{r}{R},\ \theta,\ \alpha\right)\sin\alpha\,d\alpha,$$
$$u_\theta(r,\theta) = \frac{R}{2\pi\mu}\int_0^{\pi} \sigma_r^0(\alpha) H_\theta\left(\frac{r}{R},\ \theta,\ \alpha\right)\sin\alpha\,d\alpha. \tag{1.27}$$

Ici

$$H_r(r,\theta,\alpha) = \frac{1-2\nu}{1+\nu}\frac{\pi r}{2} + \frac{1-r^2}{2r}\left(2r\frac{\partial U}{\partial r} + U\right) +$$
$$+ 2(1-\nu)\frac{1+r^2}{r}U + \frac{1}{r}\mathrm{Re}\int_0^1\left(\frac{Pr^2+Q}{y^{1+n_1}} + \frac{1}{y^2}\right)U(ry)\,dy,$$

$$H_\theta(r,\theta,\alpha) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[(1-r^2)U + \mathrm{Re}\int_0^1\left(\frac{Sr^2+T}{y^{1+n_1}} + \frac{1}{y^2}\right)U(ry)\,dy\right],$$

$$U(r) \equiv U(r,\theta,\alpha) = \int_0^{\pi/2} d\psi \sum_{n=2}^{\infty} r^n P_n(\lambda) = \frac{K(k)}{h} - \frac{\pi}{2}(1 + r\cos\theta\cos\alpha),$$

$$h^2 = (1-r)^2 + 4r\sin^2\frac{\theta+\alpha}{2}, \qquad k^2 = \frac{4r\sin\theta\sin\alpha}{h^2},$$

$K(k)$ est une intégrale elliptique de première espèce.

La solution du problème de l'élasticité est donc obtenue sous forme explicite.

On peut maintenant aborder le cas d'un chargement asymétrique (réalisé par des efforts normaux uniquement). Pour cela il convient de poser dans les formules (1.27) $\sigma_r^0(\theta) = \delta(\theta)$, c'est-à-dire de considérer un problème où le pôle est sollicité par une force concentrée. Sommant les solutions sur toute la sphère on obtient la représentation intégrale de la solution dans le cas d'un chargement arbitraire par des forces normales (que l'on peut considérer comme une sorte de fonction de Green). Le problème étant un problème intérieur, le procédé exposé nécessite une correction. Le fait est que dans ce cas le chargement est non équilibré et la solution obtenue formellement dénuée de sens. Aussi faut-il l'équilibrer par une charge (qui à l'étape finale de construction de la solu-

tion disparaît automatiquement par suite de l'auto-équilibre des forces extérieures). Nous pouvons par exemple appliquer au centre une force compensatrice concentrée. Il est vrai qu'alors la solution admettra une singularité à l'origine des coordonnées, mais celle-ci disparaît lors de la sommation. Une autre approche est proposée dans l'article déjà cité [12] : il s'agit de représenter la force compensatrice comme la somme de forces massiques, uniformément distribuées dans le volume et dirigées suivant l'axe z, et d'une certaine solution compensant les contraintes tangentielles. La solution se représente alors sous la forme

$$
\begin{aligned}
u_r^0 &= \left[\cos\theta \frac{3r^2}{4R^2}\frac{1-2\nu}{1+\nu} + \frac{1}{\pi} H_r\left(\frac{r}{R}, \theta, 0\right)\right]\frac{P_z}{4\pi\mu R},\\
u_\theta^0 &= \left[\sin\theta \frac{3r^2}{4R^2}\frac{1-2\nu}{1+\nu} + \frac{1}{\pi} H_\theta\left(\frac{r}{R}, \theta, 0\right)\right]\frac{P_z}{4\pi\mu R}.
\end{aligned}
\qquad (1.28)
$$

Soit $\sigma(R, \theta, \varphi) = \sigma(\theta, \varphi)$ la condition aux limites imposée à la surface de la sphère. Ecrivant les formules (1.28) pour un point arbitraire θ', φ' et sommant, nous obtenons

$$
\begin{aligned}
u_r(r, \theta', \varphi') &= \frac{R}{4\pi^2\mu}\int_0^{2\pi} d\beta \int_0^{\pi} \sigma(\alpha, \beta) H_r\left(\frac{r}{R}, \Theta, 0\right)\sin\alpha\, d\alpha,\\
u_\theta(r, \theta', \varphi') &= \frac{R}{4\pi^2\mu}\int_0^{2\pi} d\beta \int_0^{\pi} \sigma(\alpha, \beta) H_\theta\left(\frac{r}{R}, \Theta, 0\right)\sin\alpha\, d\alpha,
\end{aligned}
\qquad (1.29)
$$

$$\Theta = \arccos\left[\cos\theta'\cos\alpha + \sin\theta'\sin\alpha\cos(\varphi' - \beta)\right].$$

§ 2. Problèmes sur l'équilibre d'un cône circulaire et d'un coin

Appliquons la méthode de séparation des variables aux problèmes concernant un cône circulaire ($0 < r < \infty$, $0 \leqslant \theta \leqslant \alpha$, $-\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi$). Nous utiliserons naturellement un repère sphérique, dans lequel le système d'équations (4.4) du chapitre II admet une séparation des variables. Nous allons nous limiter à une classe assez particulière de solutions où tous les déplacements sont proportionnels à $1/r$ et les déplacements u_r et u_θ proportionnels en outre à $\cos n\varphi$ et u_φ à $\sin n\varphi$ (n un entier non négatif).

Une substitution directe permet de s'assurer que les déplacements, représentés sous la forme

$$u_r = \frac{\cos n\varphi}{r}\left[-\frac{\lambda+2\mu}{\mu}\frac{r^2\Delta'}{\cos n\varphi}+C\,\mathrm{tg}\,\frac{n\theta}{2}+D\cot\frac{n\theta}{2}\right],$$

$$u_\theta = \frac{\cos n\varphi}{r\sin\varphi}\left[-\frac{\lambda+3\mu}{2\mu}\sin\theta\frac{d}{d\theta}\left(\frac{r^2\Delta}{\cos n\varphi}\right)+\right.$$

$$\left.+\cos\theta\left(C\,\mathrm{tg}\,\frac{n\theta}{2}+D\cot\frac{n\theta}{2}\right)+G\,\mathrm{tg}\,\frac{n\theta}{2}+H\cot\frac{n\theta}{2}\right], \tag{2.1}$$

$$u_\varphi = \frac{\sin n\varphi}{r\sin\theta}\left[n\frac{\lambda+3\mu}{2\mu}\frac{r^2\Delta}{\cos n\varphi}-\right.$$

$$\left.-\cos\theta\left(C\,\mathrm{tg}\,\frac{n\theta}{2}-D\cot\frac{n\theta}{2}\right)-G\,\mathrm{tg}\,\frac{n\theta}{2}+H\cot\frac{n\theta}{2}\right],$$

$$\Delta = \frac{\cos n\varphi}{r^2}\left[A(n+\cos\theta)\,\mathrm{tg}\,\frac{n\theta}{2}+B(n-\cos\theta)\cot\frac{n\theta}{2}\right],$$

vérifient les équations de Lamé. Ici A, B, C, D, G et H sont des constantes arbitraires. Les cas de $n=0$, $n=1$ nécessitent une étude spéciale. On donne ici cinq solutions particulières correspondant à ces cas [87].

Solution I. Introduisant une constante arbitraire P_z nous obtenons

$$u_r = \frac{P_z}{4\pi\mu}\frac{\cos\theta}{r},$$

$$u_\theta = -\frac{\lambda+3\mu}{2(\lambda+2\mu)}\frac{P_z}{4\pi\mu}\frac{\sin\theta}{r}, \quad u_\varphi = 0,$$

$$\sigma_r = -\frac{3\lambda+4\mu}{\lambda+2\mu}\frac{P_z}{4\pi}\frac{\cos\theta}{r^2}, \tag{2.2}$$

$$\sigma_\theta = \sigma_\varphi = \frac{\mu}{\lambda+2\mu}\frac{P_z}{4\pi}\frac{\cos\theta}{r^2},$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{\mu}{\lambda+2\mu}\frac{P_z}{4\pi}\frac{\sin\theta}{r^2}, \quad \tau_{\theta\varphi} = \tau_{\varphi r} = 0.$$

Remarquons que cette solution se confond avec la solution (6.29), (6.30) du ch. III, pour une force concentrée dans l'espace, transcrite dans un repère sphérique. La force P_z est appliquée à l'origine des coordonnées et dirigée le long de l'axe z.

Solution II. Introduisant une constante P_x nous obtenons

$$
\begin{aligned}
u_r &= \frac{P_x}{4\pi\mu}\frac{\sin\theta\cos\varphi}{r},\\
u_\theta &= \frac{\lambda + 3\mu}{2(\lambda + 2\mu)}\frac{P_x}{4\pi\mu}\frac{\cos\theta\cos\varphi}{r},\\
u_\varphi &= -\frac{\lambda + 3\mu}{2(\lambda + 2\mu)}\frac{P_x}{4\pi\mu}\frac{\sin\varphi}{r},\\
\sigma_r &= -\frac{3\lambda + 4\mu}{\lambda + 2\mu}\frac{P_x}{4\pi}\frac{\sin\theta\cos\varphi}{r^2},\\
\sigma_\theta &= \sigma_\varphi = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu}\frac{P_x}{4\pi}\frac{\sin\theta\cos\varphi}{r^2},\\
\tau_{\theta\varphi} &= 0,\\
\tau_{\varphi r} &= \frac{\mu}{\lambda + 2\mu}\frac{P_x\sin\varphi}{r^2},\\
\tau_{\theta r} &= -\frac{\mu}{\lambda + 2\mu}\frac{P_x}{2\pi}\frac{\cos\theta\cos\varphi}{r^2}.
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

Cette solution correspond à une force P_x appliquée à l'origine des coordonnées dans la direction de l'axe x.

Introduisant la constante P_3, on obtient la solution III :

$$
\begin{aligned}
&u_r = \frac{P_3}{r}, \quad u_\theta = -\frac{P_3}{r}\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}, \quad u_\varphi = 0,\\
&\sigma_r = -2\mu\frac{P_3}{r^2}, \quad \sigma_\theta = 2\mu\frac{P_3}{r^2}\frac{\cos\theta}{1+\cos\theta},\\
&\sigma_\varphi = 2\mu\frac{P_3}{r^2}\frac{1}{1+\cos\theta},\\
&\tau_{\theta\varphi} = \tau_{\varphi r} = 0, \quad \tau_{r\theta} = 2\mu\frac{P_3}{r^2}\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}.
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

La solution IV s'obtient avec une constante P_4:

$$
\left.
\begin{aligned}
&u_r = 0, \quad u_\theta = -\frac{P_4}{r}\frac{\cos\theta}{1+\cos\theta}, \quad u_\varphi = \frac{P_4}{r}\frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi},\\
&\sigma_r = 0, \quad \sigma_\theta = -\sigma_\varphi = -2\mu\frac{P_4}{r^2}\frac{(1-\cos\theta)\cos\varphi}{(1+\cos\theta)\sin\theta},\\
&\tau_{\theta\varphi} = 2\mu\frac{P_4}{r^2}\frac{(1-\cos\theta)\sin\varphi}{(1+\cos\theta)\sin\theta},\\
&\tau_{\varphi r} = -2\mu\frac{P_4}{r^2}\frac{\sin\varphi}{1+\cos\theta}, \quad \tau_{r\theta} = 2\mu\frac{P_4}{r^2}\frac{\cos\varphi}{1+\cos\theta}.
\end{aligned}
\right\}
\tag{2.5}
$$

Enfin, la solution V s'obtient avec une constante P_5:

$$
\left.
\begin{aligned}
&u_r = \frac{P_5}{r}\frac{\sin\theta\cos\varphi}{1+\cos\theta},\\
&u_\theta = \frac{P_5}{r}\cos\varphi, \quad u_\varphi = -\frac{P_5}{r}\sin\varphi,\\
&\sigma_r = -\sigma_\theta = -2\mu\frac{P_5}{r^2}\frac{\sin\theta\cos\varphi}{1+\cos\theta}, \quad \sigma_\varphi = 0,\\
&\tau_{\theta\varphi} = -\mu\frac{P_5}{r^2}\frac{\sin\theta\sin\varphi}{1+\cos\theta},\\
&\tau_{\varphi r} = \mu\frac{P_5}{r^2}\left(2-\frac{1}{1+\cos\theta}\right)\sin\varphi,\\
&\tau_{r\theta} = -\mu\frac{P_5}{r^2}\left(2-\frac{1}{1+\cos\theta}\right)\cos\varphi.
\end{aligned}
\right\}
\tag{2.6}
$$

Faisons la somme des solutions I et III exigeant par ailleurs que sur le cône $\theta=\alpha$ les valeurs frontières du vecteur des contraintes s'annulent. Pour les composantes tangentielles cette condition est automatiquement satisfaite. Pour la composante normale on a l'équation

$$
\frac{\mu}{\lambda+2\mu}\frac{P_z}{4\pi}+\frac{2\mu P_3}{1+\cos\alpha}=0. \tag{2.7}
$$

La solution que nous avons obtenue se rapporte au cas d'un cône dont la surface latérale est libre de contraintes. Déterminant la résultante des efforts s'exerçant sur toute surface passant

à l'intérieur du cône (il est commode de prendre comme telle une partie de sphère centrée au sommet) nous voyons qu'elle se ramène à une force

$$F_1 = \frac{P_x}{2(\lambda + 2\mu)} [\lambda (1 - \cos^3\alpha) + \mu(1 - \cos\alpha)(1 + \cos^2\alpha)] \quad (2.8)$$

dirigée le long de l'axe x vers l'intérieur du cône.

Posant dans les formules précédentes $\alpha = \pi/2$, nous obtenons le cas du demi-espace (la solution (6.24) et (6.25) de ce problème a été donnée au § 6 du chapitre III en coordonnées cartésiennes).

Combinant les solutions II, IV et V on peut obtenir la solution correspondant au cas où au sommet du cône agit une force concentrée perpendiculaire à son axe. L'absence de contraintes sur la surface donne lieu aux égalités

$$2P_4 \frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha} - P_5 \sin\alpha = 0,$$

$$2P_4 - P_5(1 + 2\cos\alpha) - \frac{P_x}{4\pi(\lambda + 2\mu)} \cos\alpha(1 + \cos\alpha) = 0, \quad (2.9)$$

$$-2P_4 \frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha} + 2P_5 \sin\alpha + \frac{P_x}{4\pi(\lambda + 2\mu)} \sin\alpha(1 + \cos\alpha) = 0,$$

d'où

$$P_4 = -\frac{P_x(1 + \cos\alpha)^2}{8\pi(\lambda + 2\mu)}, \quad P_5 = -\frac{P_x(1 + \cos\alpha)}{4\pi(\lambda + 2\mu)}.$$

La force résultante est dirigée dans le sens positif de l'axe x et est égale à

$$F_2 = \frac{P_x}{4} \frac{(2 + \cos\alpha)\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} (1 - \cos\alpha)^2. \quad (2.10)$$

Il est clair que pour $\alpha = \pi/2$ nous aboutissons au problème du demi-espace sollicité par une force tangentielle concentrée appliquée en un point frontière.

Des solutions analogues aux précédentes sont obtenues pour le problème plan aussi (cf. par exemple [153]). Considérons un coin d'angle d'ouverture 2α $(-\alpha \leqslant \theta \leqslant \alpha)$. A une force concentrée P appliquée au sommet et dirigée suivant la bissectrice correspond la solution

$$\sigma_r = -\frac{2P\cos\theta}{2\alpha + \sin 2\alpha} \frac{1}{r}, \quad \sigma_\theta = \tau_{r\theta} \equiv 0. \quad (2.11)$$

A une force P dirigée perpendiculairement à la bissectrice correspond la solution

$$\sigma_r = -\frac{2P\sin\theta}{2\alpha - \sin 2\alpha}\frac{1}{r}, \quad \sigma_\theta = \tau_{r\theta} \equiv 0. \tag{2.12}$$

Il n'y a aucune difficulté à obtenir formellement la solution qu'on peut interpréter comme celle correspondant au cas d'application au sommet d'un moment concentré M :

$$\begin{gathered} \sigma_r = -\frac{2M\sin 2\theta}{\sin 2\alpha - 2\alpha\cos 2\alpha}\frac{1}{r^2}, \quad \sigma_\theta = 0, \\ \tau_{r\theta} = \frac{M(\cos 2\theta - \cos 2\alpha)}{\sin 2\alpha - 2\alpha\cos 2\alpha}\frac{1}{r^2}. \end{gathered} \tag{2.13}$$

La solution présente cet inconvénient que pour un $\alpha \approx 0{,}714\pi$ le dénominateur s'annule. On reviendra sur cette question au § 2 du chapitre VI.

§ 3. Torsion des barres de section transversale polygonale

La méthode de séparation des variables est particulièrement efficace, on l'a déjà dit, quand le domaine représente dans le repère curviligne correspondant un parallélépipède (ou un rectangle). Toutefois, on peut l'appliquer également dans le cas où le domaine est une réunion de domaines de ce genre [8]. Exposons cette méthode sur l'exemple du problème de torsion d'une barre de section prismatique montrée sur la figure 29.

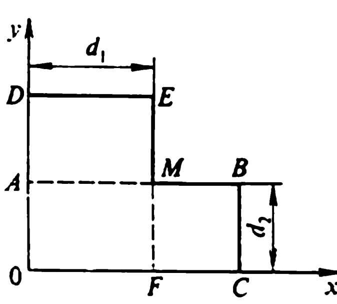


Fig. 29. Section polygonale d'une barre.

Comme on a indiqué au § 3, ch. III (formule (3.13)), le problème de torsion se ramène à la détermination dans le domaine D ($ODEMBC$) d'une fonction ψ, vérifiant l'équation de Poisson $\Delta\psi = -2$ et s'annulant sur la frontière. Représentons le domaine D comme constitué de deux rectangles se recouvrant D_1 ($OABC$) et D_2 ($ODEF$). Posons le problème comme suit : définir dans le domaine D_1 une fonction ψ_1 et dans le domaine D_2 une fonction ψ_2 qui se confondent dans le rectangle D_3 ($OAMF$) et vérifient partout l'équation de Poisson. Comme les fonctions ψ_1 et ψ_2 vérifient une équation du deuxième ordre, pour qu'elles se confondent dans le domaine D_3 il faut que sur le contour de ce do-

maine les fonctions elles-mêmes se confondent ainsi que leurs dérivées premières suivant la normale. Compte tenu de ce qui vient d'être dit, les conditions aux limites et les conditions sur les segments AM et MF (qu'on peut appeler conditions de conjugaison) s'écrivent

$$\begin{gathered}\psi_1(0, y) = \psi_1(x, 0) = \psi_1(a, y) = 0,\\ \psi_1(x, d_2) = \begin{cases} 0, & x \geqslant d_1,\\ \psi_2(x, d_2), & x \leqslant d_1,\end{cases}\\ \psi_2(x, 0) = \psi_2(0, y) = \psi_2(x, b) = 0,\\ \psi_2(d_1, y) = \begin{cases} 0, & y \geqslant d_2,\\ \psi_1(d_1, y) & y < d_2.\end{cases}\end{gathered} \tag{3.1}$$

Nous allons chercher les fonctions $\psi_1(x, y)$ et $\psi_2(x, y)$ sous la forme des sommes

$$\psi_{11}(x, y) + \psi_{12}(x, y) \quad \text{et} \quad \psi_{21}(x, y) + \psi_{22}(x, y). \tag{3.2}$$

Les fonctions ψ_{12} et ψ_{22} sont différentes de zéro uniquement dans le domaine D_3 et vérifient l'équation de Laplace. La décomposition nécessaire des conditions aux limites (3.1) peut être effectuée de différentes manières. Pour simplifier les développements ultérieurs, écrivons-les sous la forme suivante :

$$\psi_{11}(0, y) + \psi_{12}(0, y) = \psi_{11}(x, 0) = \psi_{11}(a, y) = \psi_{11}(x, d_2) = 0, \tag{3.3}$$

$$\psi_{21}(x, 0) + \psi_{22}(x, 0) = \psi_{21}(0, y) = \psi_{21}(x, b) = \psi_{21}(d_1, y) = 0, \tag{3.4}$$

$$\psi_{12}(x, 0) = \psi_{12}(d_1, y) = \left(\frac{\partial \psi_{12}}{\partial x}\right)_{x=d_1} = \\ = \psi_{12}(x, d_2) - \psi_{21}(x, d_2) = 0, \tag{3.5}$$

$$\psi_{22}(0, y) = \psi_{22}(x, d_2) = \left(\frac{\partial \psi_{22}}{\partial y}\right)_{y=d_2} = \\ = \psi_{22}(d_1, y) - \psi_{11}(d_1, y) = 0. \tag{3.6}$$

Une remarque est à faire. De la nullité d'une fonction harmonique et de sa dérivée à la frontière il découle que la fonction est identiquement nulle dans le domaine d'harmonicité. Ceci étant, les fonctions ψ_{12} et ψ_{22} doivent admettre dans le domaine D_3 des points singuliers, de sorte que les développements en séries des fonctions ψ_{ij} seront en général divergents. Les représentations des fonctions ψ_1 et ψ_2 seront néanmoins convergentes. Des conditions (3.3) et (3.4) il découle que les fonctions ψ_{11} et ψ_{21} peuvent

être recherchées sous la forme des séries

$$\begin{aligned} \psi_{11}(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} f_k^{(1)}(x) \sin \frac{k\pi y}{d_2}, \\ \psi_{21}(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} f_k^{(2)}(y) \sin \frac{k\pi x}{d_1}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Les fonctions harmoniques ψ_{12} et ψ_{22} seront choisies sous la forme des séries [36]

$$\psi_{12}(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k^{(1)}(x) \sin \frac{k\pi y}{d_2}, \tag{3.8}$$

$$\psi_{22}(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k^{(2)}(y) \sin \frac{k\pi x}{d_1}. \tag{3.9}$$

Conformément à (3.7), les deux dernières conditions de (3.5) et (3.6) s'écriront

$$\psi_{21}(x, d_2) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^{(2)}(d_2) \sin \frac{k\pi x}{d_1}, \tag{3.10}$$

$$\psi_{22}(d_1, y) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^{(1)}(d_1) \sin \frac{k\pi y}{d_2}. \tag{3.11}$$

Les fonctions $f_k^{(1)}(x)$ et $f_k^{(2)}(y)$ se définissent par les expressions suivantes

$$f_k^{(1)}(x) = A_k^{(1)} \operatorname{sh} \frac{k\pi x}{d_2} + B_k^{(1)} \operatorname{ch} \frac{k\pi x}{d_2} + \frac{4d_2^2}{(k\pi)^3} [1 + (-1)^{k+1}], \tag{3.12}$$

$$f_k^{(2)}(y) = A_k^{(2)} \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{d_1} + B_k^{(2)} \operatorname{ch} \frac{k\pi y}{d_1} + \frac{4d_1^2}{(k\pi)^3} [1 + (-1)^{k+1}]. \tag{3.13}$$

D'une manière analogue, pour les fonctions $v_k^{(1)}(x)$ et $v_k^{(2)}(x)$ nous avons

$$v_k^{(1)}(x) = D_k^{(1)} \operatorname{sh} \frac{k\pi x}{d_2} + C_k^{(1)} \operatorname{ch} \frac{k\pi x}{d_2} + \\ + (-1)^{k+1} \frac{2k}{\pi} \left(\frac{d_1}{d_2} \right)^2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{f_p^{(2)}(d_2) \sin \frac{p\pi x}{d_1}}{p^2 + \left(\frac{kd_1}{d_2} \right)^2}, \tag{3.14}$$

$$v_k^{(2)}(y) = D_k^{(2)} \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{d_1} + C_k^{(2)} \operatorname{ch} \frac{k\pi y}{d_1} + \\ + (-1)^{k+1} \frac{2k}{\pi} \left(\frac{d_2}{d_1} \right)^2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{f_p^{(1)}(d_1) \sin \frac{p\pi y}{d_2}}{p^2 + \left(\frac{kd_2}{d_1} \right)^2}. \tag{3.15}$$

Pour déterminer les constantes A_k^i, B_k^i, C_k^i et D_k^i $(i = 1, 2)$ nous allons nous servir des égalités

$$f_k^{(1)}(a) = f_k^{(2)}(b) = 0,$$
$$v_k^{(1)}(d_1) = v_k^{(1)\prime}(d_1) = 0, \quad v_k^{(2)}(d_2) = v_k^{(2)\prime}(d_2) = 0, \tag{3.16}$$
$$f_k^{(1)}(0) + v_k^{(1)}(0) = f_k^{(2)}(0) + v_k^{(2)}(0) = 0.$$

Le système d'équations qu'on obtiendra pour ces constantes se laisse simplifier si l'on exprime toutes les inconnues par $B_k^{(1)}$ et $B_k^{(2)}$. Bien plus, le système se simplifiera encore si l'on introduit de nouvelles inconnues $F_k^{(1)}$ et $F_k^{(2)}$, posant

$$B_k^{(1)} = F_k^{(1)} d_1 d_2 \operatorname{sh} \frac{k\pi d_1}{d_2} \frac{(-1)^{k+1}}{k},$$
$$B_k^{(2)} = F_k^{(2)} d_1 d_2 \operatorname{sh} \frac{k\pi d_2}{d_1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}. \tag{3.17}$$

Ecrivons-le sous la forme d'un ensemble de systèmes

$$F_k^{(1)} = \sum_{p=1}^{\infty} a_{kp} F_p^{(2)} + \beta_k \quad (k = 1, 2, \ldots),$$
$$F_k^{(2)} = \sum_{p=1}^{\infty} c_{kp} F_p^{(1)} + \gamma_k, \tag{3.18}$$

où

$$a_{kp} = \frac{2kd_1 d_2 \operatorname{sh} \frac{p\pi d_2}{d_1} \operatorname{sh} \frac{p\pi}{d_1} (b - d_2) \operatorname{cosech} \frac{p\pi b}{d_1}}{\pi(p^2 d_2^2 + k^2 d_1^2)},$$

$$c_{kp} = \frac{2kd_1 d_2 \operatorname{sh} \frac{p\pi d_1}{d_2} \operatorname{sh} \frac{p\pi}{d_2} (a - d_1) \operatorname{cosech} \frac{p\pi a}{d_2}}{\pi(p^2 d_1^2 + k^2 d_2)}.$$

$$\beta_k = -\frac{4d_2}{k^2\pi^3 d_1}[1 + (-1)^{k+1}] \operatorname{cosech} \frac{k\pi d_1}{d_2} + \tag{3.19}$$
$$+ \frac{16k}{\pi^4}\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 \sum_{p=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{1 - \operatorname{cosech} \frac{p\pi b}{d_1} \operatorname{sh} \frac{p\pi d_2}{d_1}}{p^2\left[p^2 + \left(\frac{kd_1}{d_2}\right)^2\right]},$$

$$\gamma_k = -\frac{4d_1}{k^2\pi^3 d_2}[1 + (-1)^{k+1}] \operatorname{cosech} \frac{k\pi d_2}{d_1} +$$
$$+ \frac{16k}{\pi^4}\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 \sum_{p=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{1 - \operatorname{cosech} \frac{p\pi a}{d_2} \operatorname{sh} \frac{p\pi d_1}{d_2}}{p^2\left[p^2 + \left(\frac{kd_2}{d_1}\right)^2\right]}.$$

L'ensemble des systèmes (3.18) peut s'écrire en un seul système si l'on pose

$$F_k^{(1)} = Z_{2k-1}, \quad \beta_k = \alpha_{2k-1}; \quad F_k^{(2)} = Z_{2k}, \quad \gamma_k = \alpha_{2k}; \tag{3.20}$$
$$A_{2k-1,\,2p-1} = A_{2k,\,2p} = 0, \quad A_{2k-1,\,2p} = a_{kp}, \quad A_{2k,\,2p-1} = c_{kp}.$$

Démontrons que ce système est régulier (cf. § 15, ch. I).

Considérons séparément les équations pour m impairs et pairs. Dans le premier cas nous avons

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_{mn}| = \sum_{p=1}^{\infty} |a_{kp}| = \frac{2kd_1}{\pi d_2} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh}\frac{p\pi d_2}{d_1} \operatorname{sh}\frac{p\pi}{d_1}(b-d_2)\operatorname{cosech}\frac{p\pi b}{d_1}}{p^2 + \left(\frac{kd_1}{d_2}\right)^2} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{kd_1}{\pi d_2} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2 + \left(\frac{kd_1}{d_2}\right)^2} = \frac{1}{2}\left(\coth\frac{k\pi d_1}{d_2} - \frac{d_2}{k\pi d_1}\right) \leqslant \frac{1}{2}. \tag{3.21}$$

Ici sont utilisées les inégalités

$$\coth x - \frac{1}{x} \leqslant 1 \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant x < \infty,$$
$$\operatorname{sh} x \operatorname{sh}(y-x) \operatorname{cosech} y \leqslant \frac{1}{2}(1 - e^{-2x}) \leqslant \frac{1}{2} \tag{3.22}$$

pour $y > x \geqslant 0$ et l'identité

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2 + a^2} = \frac{\pi}{2a}\left(\coth a\pi - \frac{1}{a\pi}\right). \tag{3.23}$$

De façon analogue est considéré le cas des m pairs :

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_{mn}| = \sum_{p=1}^{\infty} |c_{kp}| =$$
$$= \frac{2kd_2}{\pi d_1} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh}\frac{p\pi d_1}{d_2} \operatorname{sh}\frac{p\pi}{d_2}(a-d_1)\operatorname{cosech}\frac{p\pi a}{d_2}}{p^2 + \left(\frac{kd_2}{d_1}\right)^2} \leqslant \frac{1}{2}. \tag{3.24}$$

Remarquons que les termes constants du système d'équations sont bornés et tendent vers zéro.

Aussi peut-on affirmer que la solution de systèmes « tronqués » conduit à la limite à la solution d'un système infini.

§ 4. Oscillations d'une plaque en forme de secteur circulaire

Le problème de la détermination des fréquences d'oscillations propres d'une plaque dans un repère polaire se ramène à la considération d'une équation différentielle de la forme

$$\frac{D}{a^4}\,\Delta^2 w+\gamma\delta\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0 \quad \left(t\geqslant 0,\quad 0\leqslant \rho=\frac{r}{a}\leqslant 1\right),$$
$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2},\quad D=\frac{E\delta^3}{12(1-\nu^2)}, \tag{4.1}$$

où γ est la densité, δ l'épaisseur de la plaque, a le rayon extérieur, D la rigidité cylindrique.

Considérons une plaque en forme de secteur circulaire aux bords encastrés [61]. Nous chercherons la solution de l'équation (4.1) vérifiant aux bords les conditions d'encastrement $\theta=\pm\,\theta_0$ sous la forme d'une série

$$w(\rho,\theta,t)=\sum_{n=2}^{\infty} w_n(\rho,t)h_n(\varphi),\quad \varphi=\frac{\theta}{\theta_0}, \tag{4.2}$$

où $h_n(\varphi)$ sont les polynômes orthonormés de Horvay [38, 39] vérifiant pour $\varphi=\pm\,1$ les conditions

$$h_n(\pm 1)=h_n'(\pm 1)=0 \quad \left(h_n'=\frac{dh_n}{d\varphi}\right). \tag{4.3}$$

Pour trouver les fonctions $w_n(\rho,t)$ nous appliquerons la méthode de réduction à des équations différentielles ordinaires [43], supposant par ailleurs que les polynômes $h_n(\varphi)$ admettent des dérivées première et seconde approximativement orthogonales. Ceci nous donne

$$\frac{D}{a^4\gamma\delta}\left[LL\,w_n+\frac{1}{\rho^4\theta_0^4}(B_n-A_n^2)w_n\right]+\frac{\partial^2 w_n}{\partial t^2}=0,$$
$$L=\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}-\frac{A_n}{\rho^2\theta_0^2}, \tag{4.4}$$
$$A_n=\int_{-1}^{+1}(h_n')^2\,d\varphi,\quad B_n=\int_{-1}^{+1}(h_n'')^2\,d\varphi.$$

La solution de l'équation (4.4) sera cherchée par la méthode des transformations intégrales aux limites finies [142]. Introduisons

les notations

$$W_n(\gamma_{nt}, t) = \int_0^1 \rho w_n(\rho, t) G_n(\rho\gamma_{nt})\, d\rho, \tag{4.5}$$

où $G_n(\rho\gamma_{nt})$ est le noyau inconnu de transformation intégrale, γ_{nt} un paramètre.

Intégrant successivement par parties on peut montrer que

$$\int_0^1 \rho \left[LLw_n + \frac{1}{\rho^4\theta_0^4}(B_n - A_n^2) w_n\right] G(\rho\gamma_{nt})\, d\rho =$$

$$= \Big[K(\rho\gamma_{nt}, t)\Big]_{\rho=0}^{\rho=1} + \int_0^1 \rho w_n \left[LLG_n + \frac{1}{\rho^4\theta_0^4}(B_n - A_n^2) G_n\right] d\rho. \tag{4.6}$$

Ici

$$K(\rho\gamma_{nt}, t) = \rho \left\{\frac{\partial^3 w_n}{\partial\rho^3} G_n + \frac{\partial^2 w_n}{\partial\rho^2}\left(\frac{G_n}{\rho} - \frac{dG_n}{d\rho}\right) + \right.$$

$$+ \frac{\partial w_n}{\partial\rho}\left[\frac{d^2G_n}{d\rho^2} - \frac{1}{\rho^2}\left(1 - \frac{A_n}{\theta_0^2}\right) G_n\right] -$$

$$\left. - w_n \left[\frac{d^3G_n}{d\rho^3} + \frac{1}{\rho}\frac{d^2G_n}{d\rho^2} - \frac{1}{\rho^3}\left(1 + \frac{A_n}{\theta_0^2}\right) G_n\right]\right\}. \tag{4.7}$$

Supposons que la fonction $G_n(\rho\gamma_{nt})$ vérifie l'équation

$$LLG_n + \frac{1}{\rho^4\theta_0^4}(B_n - A_n^2) G_n = \gamma_{nt} G_n \tag{4.8}$$

et les conditions aux frontières

$$G_n = \frac{dG_n}{d\rho} = 0 \quad (\rho = 0, \quad \rho = 1). \tag{4.9}$$

Multipliant (4.4) par ρG_n et intégrant par rapport à ρ $(0 \leqslant \rho \leqslant 1)$, nous obtenons, compte tenu de (4.5), (4.8), (4.9) et des conditions

$$w_n = \frac{dw_n}{d\rho} = 0 \quad (\rho = 0, \quad \rho = 1),$$

l'équation suivante :

$$\frac{d^2W_n}{dt^2} + \omega_{nt}^2 W_n = 0, \quad \omega_{nt}^2 = \frac{\gamma_{nt} D}{a^4\gamma\delta}. \tag{4.10}$$

Passons à la détermination des valeurs propres γ_{ni} et des fonctions propres $G_n(\rho\gamma_{ni})$ du problème aux limites (4.8), (4.9). Transformons au préalable l'équation (4.8), en effectuant le changement de variable $\rho = e^x$. Nous obtenons alors

$$L_1 L_2 G_n - \gamma_{ni} e^{4x} G_n = 0, \quad L_{1,2} = \frac{d^2}{dx^2} - 2\frac{d}{dx} - \varkappa_{1,2}, \tag{4.11}$$

où $\varkappa_{1,2}$ sont les racines de l'équation

$$\varkappa^2 + \frac{2A_n}{\theta_0^2}\varkappa + \frac{1}{\theta_0^4}(B_n - 4A_4\theta_0^2) = 0. \tag{4.12}$$

Nous chercherons la solution de (4.11) sous la forme

$$G_n = \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_{ni}^m G_n^{(m)}. \tag{4.13}$$

Portant (4.13) dans (4.11) et égalant les coefficients des mêmes puissances de γ_{ni}, nous obtenons un système d'équations à coefficients constants :

$$L_1 L_2 G_n^{(0)} = 0, \quad L_1 L_2 G_n^{(m)} = e^{4x} G_n^{(m-1)} \quad (m = 1, 2, \ldots). \tag{4.14}$$

Nous considérerons dans la suite les plaques en forme de secteur circulaire dont l'angle au sommet vérifie la condition

$$2\theta_0 < \left(\frac{B_n - A_n^2}{A_n}\right)^{1/2} < \left(\frac{B_2 - A_2^2}{A_2}\right)^{1/2} = 2{,}74 \quad (n = 3, 4, \ldots). \tag{4.15}$$

Dans ce cas le polynôme caractéristique de l'opérateur L_1L_2

$$P(\lambda) \equiv \left[\lambda(\lambda - 2) - \frac{A_n}{\theta_0^2}\right]^2 + \frac{1}{\theta_0^4}(B_4 - 4A_n\theta_0^2 - A_n^2) \tag{4.16}$$

possède des racines complexes conjuguées de la forme

$$\begin{aligned} \lambda_{1n}^0 &= \lambda_{1n} + i\lambda_n, \quad \lambda_{2n}^0 = \lambda_{2n} + i\lambda_n, \\ \lambda_{3n}^0 &= \lambda_{1n} - i\lambda_n, \quad \lambda_{4n}^0 = \lambda_{2n} - i\lambda_n, \end{aligned} \tag{4.17}$$

où

$$\lambda_{1n} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(1 - \frac{2A_n}{\theta_0^2} + \frac{B_n}{\theta_0^4}\right)^{1/2} + \frac{A_n}{\theta_0^2} + 1\right]^{1/2},$$

$$\lambda_n = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(1 - \frac{2A_n}{\theta_0^2} + \frac{B_n}{\theta_0^4}\right)^{1/2} - \frac{A_n}{\theta_0^2} - 1\right]^{1/2},$$

$$\lambda_{2n} = 2 - \lambda_{1n}.$$

Résolvant successivement le système (4.14) nous trouvons la solution générale de l'équation (4.11):

$$G_n(\rho\gamma_{nt}) = c_1 \operatorname{Re} Z_n^{(1)}(\rho\gamma_{nt}) + c_2 \operatorname{Im} Z_n^{(1)}(\rho\gamma_{nt}) + \\ + c_3 \operatorname{Re} Z_n^{(2)}(\rho\gamma_{nt}) + c_4 \operatorname{Im} Z_n^{(2)}(\rho\gamma_{nt}). \quad (4.18)$$

Ici

$$Z_n^{(1)}(\rho\gamma_{nt}) = \rho^{\lambda_{1n}^0}\left\{1 + \sum_{m=1}^{\infty}(\rho^4\gamma_{nt})^m\left[\prod_{j=1}^{m} P(4j+\lambda_{1n}^0)\right]^{-1}\right\},$$

$$Z_n^{(2)}(\rho\gamma_{nt}) = \rho^{\lambda_{2n}^0}\left\{1 + \sum_{m=1}^{\infty}(\rho^4\gamma_{nt})^m\left[\prod_{j=1}^{m} P(4j+\lambda_{2n}^0)\right]^{-1}\right\}. \quad (4.19)$$

La fonction $G_n(\rho\gamma_{nt})$ devant être bornée pour $\rho = 0$, posons $c_3 = c_4 = 0$. Le noyau de transformation s'écrit alors

$$G_n(\rho\gamma_{nt}) = c_1 \operatorname{Re} Z_n^{(1)}(\rho\gamma_{nt}) + c_2 \operatorname{Im} Z_n^{(1)}(\rho\gamma_{nt}). \quad (4.20)$$

La fonction $Z_n^{(1)}(\rho\gamma_{nt})$ peut être représentée sous une forme différente si l'on tient compte des relations suivantes

$$P(4j + \lambda_{1n}^0) = 256j(j-1+\beta_{1n}^0)(j-1+\beta_{2n}^0)(j-1+\beta_{3n}^0),$$

$$\prod_{j=1}^{m} P(4j+\lambda_{1n}^0) = (256)^m m!\,(\beta_{1n}^0, m)(\beta_{2n}^0, m)(\beta_{3n}^0, m), \quad (4.21)$$

où l'on a noté

$$(\beta, m) = \beta(\beta+1)\ldots(m-1+\beta),$$

$$\beta_{1n}^0 = \frac{1}{2}(1+\lambda_{1n}^0), \quad \beta_{2n}^0 = \frac{1}{2}(1+\lambda_{1n}), \quad \beta_{3n}^0 = \frac{1}{2}(2+i\lambda_{.n}).$$

On peut alors écrire la première formule (4.19) sous la forme

$$Z_n^{(1)}(\rho\gamma_{nt}) = \rho^{\lambda_{1n}^0}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{\gamma_{nt}\rho^4}{256}\right)^m \frac{1}{(\beta_{1n}^0, m)(\beta_{2n}^0, m)(\beta_{3n}^0, m)m!}. \quad (4.22)$$

Il est connu [11] que la série figurant dans la formule (4.22) qui est une fonction hypergéométrique distributionnelle de la forme $F_3(\beta_{1n}^0, \beta_{2n}^0, \beta_{3n}^0; \gamma_{nt}\rho^4/256)$, converge pour toutes les valeurs finies de la quantité $\gamma_{nt}\rho^4/256$. A l'aide de la condition (4.9) nous obtenons un système permettant de déterminer les constantes c_1 et c_2:

$$c_1 \operatorname{Re} Z_n^{(1)}(\gamma_{nt}) + c_2 \operatorname{Im} Z_n^{(1)}(\gamma_{nt}) = 0,$$

$$c_1 \operatorname{Re}\left[\frac{d}{d\rho} Z_n^{(1)}(\gamma_{nt}\rho)\right]_{\rho=1} + c_2 \operatorname{Im}\left[\frac{d}{d\rho} Z_n^{(1)}(\gamma_{nt}\rho)\right]_{\rho=1} = 0. \quad (4.23)$$

Egalant à zéro le déterminant du système (4.23) nous obtenons une équation pour déterminer les valeurs propres γ_{ni}:

$$\left\{\mathrm{Re}\,[Z_n^{(1)}(\gamma_{ni}\rho)]\,\mathrm{Im}\left[\frac{d}{d\rho}Z_n^{(1)}(\gamma_{ni}\rho)\right] - \right.$$

$$\left. - \mathrm{Im}\,[Z_n^{(1)}(\gamma_{ni}\rho)]\,\mathrm{Re}\left[\frac{d}{d\rho}Z_n^{(1)}(\gamma_{ni}\rho)\right]\right\}_{\rho=1} = 0. \quad (4.24)$$

Compte tenu de (4.24), l'expression définitive du noyau de transformation peut s'écrire (supposant, par exemple, l'une des constantes égale à $\mathrm{Im}\, Z_n^{(1)}(\gamma_{ni})$)

$$G_n(\rho\gamma_{ni}) = \mathrm{Re}\,[Z_n^{(1)}(\gamma_{ni})]\,\mathrm{Im}\,[Z_n^{(1)}(\gamma_{ni}\rho)] -$$

$$- \mathrm{Re}\,[Z_n^{(1)}(\gamma_{ni}\rho)]\,\mathrm{Im}\,[Z_n^{(1)}(\gamma_{ni}\rho)]. \quad (4.25)$$

Afin de déterminer la valeur asymptotique des racines γ_{ni} considérons l'équation (4.8) où pour des grands γ_{ni} on peut négliger le deuxième terme du premier membre. On obtient alors pour la fonction G_n une équation approchée

$$LLG_n - \gamma_{ni}G_n = 0. \quad (4.26)$$

Bornée pour $\rho = 0$, la solution de (4.26) s'écrit

$$G_n = c_1 I_\nu(\omega\rho) + c_2 J_\nu(\omega\rho), \quad (4.27)$$

où $\nu = A_n^{1/2}/\theta^2$, $\omega = \gamma_{ni}^{1/4}$, J_ν, I_ν étant des fonctions de Bessel d'ordre ν d'argument réel et imaginaire. Vérifiant les conditions (4.9) et utilisant les propriétés des fonctions de Bessel nous obtenons l'équation suivante pour déterminer γ_{ni}:

$$J_\nu(\omega)J_{\nu+1}(\omega) + I_{\nu+1}(\omega)J_\nu(\omega) = 0. \quad (4.28)$$

Portant dans (4.28) les formules asymptotiques correspondantes des fonctions de Bessel, nous aurons approximativement

$$\sin\left(\omega - \nu\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\omega - \nu\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 0. \quad (4.29)$$

On tire de (4.29)

$$\omega = \gamma_{ni}^{1/4} = m\pi + \nu\frac{\pi}{2}. \quad (4.30)$$

On a calculé les valeurs propres γ_{ni} d'après l'équation (4.24) pour des plaques en forme de quart de cercle encastrées suivant le contour. On présente dans le tableau 1 les valeurs de la quantité $\gamma_{ni}/256$ pour le cas des formes d'oscillations symétriques.

Tableau 1

n \ i	1	2	3	4	5	6	7
2	9.328 (7.437)	43.253 (35.262)	128.435 (107.804)	299.89 (256.96)	601.881 (527.77)	1088.27 (968.77)	1757.64 (1640.13)
4	77.256 (105.24)	216.282 (253.02)	463.511 (519.3)	922.113 (955.03)	1780.3 (1620.3)	2850.52 (2584.2)	4112.81 (3925.2)
6	334.241 (532.57)	761.42 (975.95)	1432.12 (1651.35)	2421.06 (2628.3)	3842.71 (3985.5)	5164.57 (5810.8)	8851.93 (8201.1)

Entre parenthèses sont indiquées les valeurs $\gamma_{ni}/256$, calculées d'après la formule asymptotique (4.30). On voit que, pour $i = 7$ par exemple, l'erreur sur γ_{ni} constitue moins de 8 %.

§ 5. Sur les oscillations établies d'un plan présentant une coupure

Appliquons la méthode de séparation des variables à l'étude d'un problème dynamique de l'élasticité concernant un plan présentant une coupure [103].

Le processus ondulatoire sera considéré dans sa phase stationnaire, la dépendance de toutes les grandeurs par rapport au temps s'exprimant par le facteur exp $(-i\omega t)$, où ω est la fréquence des oscillations, t le temps. Supposons qu'aux bords de la coupure est appliquée une charge normale $q(\theta)e^{-i\omega t}$. Introduisons un repère elliptique

$$x + iy = l \operatorname{ch} (\rho + i\theta).$$

Au contour de la coupure correspond la valeur $\rho = 0$ $(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$.

Les équations du mouvement et les relations d'élasticité par rapport aux valeurs d'amplitude des contraintes et des déplacements dans le repère choisi sont de la forme

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial \rho}(H\sigma_\rho) + \frac{\partial}{\partial \theta}(H\tau_{\rho\theta}) + \frac{\partial H}{\partial \theta}\tau_{\rho\theta} - \frac{\partial H}{\partial \rho}\sigma_\theta = -H^2\rho_0\omega^2 u_\rho,\\ \frac{\partial}{\partial \theta}(H\sigma_\theta) + \frac{\partial}{\partial \rho}(H\tau_{\rho\theta}) + \frac{\partial H}{\partial \rho}\tau_{\rho\theta} - \frac{\partial H}{\partial \theta}\sigma_\rho = -H^2\rho_0\omega^2 u_\theta;\end{gathered} \tag{5.1}$$

$$\tau_{\rho\theta} = \mu\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{u_\theta}{H}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{u_\rho}{H}\right)\right],$$

$$\sigma_\rho = 2\mu\left(\frac{1}{H}\frac{\partial u_\rho}{\partial\rho} + \frac{1}{H^2}\frac{\partial H}{\partial\theta}u_\theta\right) + \frac{\lambda}{H^2}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(Hu_\rho) + \frac{\partial}{\partial\theta}(Hu_\theta)\right], \quad (5.2)$$

$$\sigma_\theta = 2\mu\left(\frac{1}{H}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} + \frac{1}{H^2}\frac{\partial H}{\partial\rho}u_\rho\right) + \frac{\lambda}{H^2}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(Hu_\rho) + \frac{\partial}{\partial\theta}(Hu_\theta)\right],$$

où $H^2 = 1/2\, l^2(\text{ch } 2\rho - \cos 2\theta)$, ρ_0 est la densité du matériau, ω la fréquence d'oscillations.

Exprimons de façon usuelle les composantes des déplacements et des contraintes par deux fonctions (potentiels) φ et ψ (cf. § 5, ch. III) :

$$u_\rho = \frac{1}{H}\frac{\partial\varphi}{\partial\rho} + \frac{1}{H}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}, \quad u_\theta = \frac{1}{H}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} - \frac{1}{H}\frac{\partial\psi}{\partial\rho}.$$

φ et ψ sont solutions des équations

$$\nabla^2\varphi + 2k_1(\text{ch } 2\rho - \cos 2\theta)\varphi = 0 \quad \left(\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right),$$

$$\nabla^2\psi + 2k_2(\text{ch } 2\rho - \cos 2\theta)\psi = 0, \quad (5.3)$$

où $k_1 = \omega^2 l^2/4a^2$, $k_2 = \omega^2 l^2/4b^2$ sont des grandeurs sans dimension, a et b les vitesses d'ondes longitudinales et transversales. Avec les représentations adoptées, les relations (5.2) s'écrivent

$$\frac{1}{2\mu}\tau_{\rho\theta} = \frac{1}{H}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{H}\frac{\partial\varphi}{\partial\rho} + \frac{1}{H}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) - \frac{1}{H^3}\frac{\partial H}{\partial\rho}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\rho} - \frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right) + \frac{\omega^2}{2b^2}\psi, \quad (5.4)$$

$$\frac{1}{2\mu}\sigma_\rho = -\frac{1}{H}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{H}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} - \frac{1}{H}\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right) - \frac{1}{H^3}\frac{\partial H}{\partial\rho}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\rho} + \frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) - \frac{\omega^2}{2b^2}\varphi,$$

$$\frac{1}{2\mu}\sigma_\theta = \frac{1}{H}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{H}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} - \frac{1}{H}\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{H^3}\frac{\partial H}{\partial\rho}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\rho} + \frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) - \frac{\lambda}{2\mu}\frac{\omega^2}{a^2}\varphi.$$

Soient données sur le contour de la coupure $\rho = 0$ $(-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi)$ les contraintes $\sigma_\rho^{(0)}$ et $\tau_{\rho\theta}^{(0)} = 0$. Alors, des deux premières

égalités (5.4), compte tenu de ce que $\left.\frac{\partial H}{\partial \rho}\right|_{\rho=0} = 0, \quad H|_{\rho=0} = l \sin\theta,$

nous aurons

$$\left.\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} - \frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right)\right|_{\rho=0} =$$

$$= -2k_2 \sin\theta \int_{\pi/2}^{\theta} \sin\theta \cdot \varphi|_{\rho=0}\, d\theta - \frac{l^2}{2\mu} \sin\theta \int_{\pi/2}^{\theta} \sin\theta \cdot \sigma_\rho^{(0)}|_{\rho=0}\, d\theta, \quad (5.5)$$

$$\left.\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\rho} + \frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)\right|_{\rho=0} = -\,2k_2 \sin\theta \int_0^{\theta} \sin\theta \cdot \psi\Big|_{\rho=0} d\theta.$$

Les relations (5.5) sont obtenues en tenant compte des égalités évidentes

$$u_\rho|_{\rho=0,\ \theta=0} = 0, \quad u_\theta|_{\rho=0,\ \theta=\pi/2} = 0.$$

Utilisant la symétrie de l'état de contrainte et les conditions à l'infini, représentons les solutions de (4.3) sous la forme

$$\varphi(\rho,\ \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m \operatorname{Fek}_{2m}(\rho, k_1)\, \operatorname{ce}_{2m}(\theta, k_1),$$

$$\psi(\rho,\ \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} D_m \operatorname{Gek}_{2m}(\rho, k_2)\, \operatorname{se}_{2m+2}(\theta, k_2). \quad (5.6)$$

Ici C_m, D_m sont des constantes, $\operatorname{ce}_{2m}(\theta, k_1)$, $\operatorname{se}_{2m+2}(\theta, k_2)$ les solutions périodiques de Mathieu, $\operatorname{Fek}_{2m}(\rho, k_1)$, $\operatorname{Gek}_{2m}(\rho, k_2)$ les secondes solutions de l'équation de Mathieu.

Les fonctions périodiques de Mathieu se laissent développer en séries :

$$\operatorname{ce}_{2m}(\theta, k_1) = \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r}^{(2m)} \cos 2r\theta,$$

$$\operatorname{se}_{2m+2}(\theta, k_2) = \sum_{r=0}^{\infty} B_{2r+2}^{(2m+2)} \sin (2r+2)\theta.$$

Dans ces séries $A_{2r}^{(2m)}$, $B_{2r+2}^{(2m+2)}$ sont des fonctions de k_1 et k_2; le procédé de leur calcul est donné dans [90].

On peut montrer que les potentiels φ et ψ donnés par (5.6) vérifient les conditions de rayonnement modifiées (4.38), ch. III :

$$\lim_{r\to\infty} \sqrt{r}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r} - i\frac{2\sqrt{k_1}}{l}\varphi\right) = 0, \quad \varphi = O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right),$$

$$\lim_{r\to\infty} \sqrt{r}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r} - i\frac{2\sqrt{k_2}}{l}\psi\right) = 0, \quad \psi = O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), \quad r = \frac{1}{2}le^{\rho}.$$

Portant (5.6) dans les conditions aux frontières (5.5) nous obtenons

$$\sum_{m=0}^{\infty} C_m \operatorname{Fek}_{2m}(0, k_1) \operatorname{ce}'_{2m}(\theta, k_1) -$$

$$- \sum_{n=0}^{\infty} D_n \operatorname{Gek}'_{2n+2}(\theta, k_2) \operatorname{se}'_{2n+2}(\theta, k_2) =$$

$$= -2k_2 \sum_{m=0}^{\infty} C_m \operatorname{Fek}'_{2m}(0, k_1)\left[\sin\theta \int_{\pi/2}^{\theta} \sin\theta \operatorname{ce}_{2m}(\theta, k_1)\, d\theta\right] -$$

$$- \frac{l^2}{2\mu}\sin\theta \int_{\pi/2}^{\theta} \sin\theta\sigma_\rho{}'_{,\rho=0}\, d\theta; \qquad (5.11)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n \operatorname{Fek}'_{2n}(0, k_1) \operatorname{ce}_{2n}(0, k_1) +$$

$$+ \sum_{m=0}^{\infty} D_m \operatorname{Gek}_{2m+2}(0, k_2) \operatorname{se}_{2m+2}(0, k_2) =$$

$$= -2k_2 \sum_{m=0}^{\infty} D_m \operatorname{Gek}_{2m+2}(0, k_2)\left[\sin\theta \int_{0}^{\theta} \sin\theta \operatorname{se}'_{2m+2}(\theta, k_2)\, d\theta\right]. \quad (5.12)$$

Multiplions l'égalité (5.11) par $\operatorname{se}_{2n+2}(\theta, k_2)$, l'égalité (5.12) par $\operatorname{ce}_{2n}(\theta, k_1)$ et intégrons par rapport à θ entre 0 et 2π; nous obtenons, en tenant compte de l'orthogonalité des solutions périodiques de Mathieu, deux systèmes d'équations infinis pour la détermination de C_m et D_m :

$$C_n \operatorname{Fek}'_{2n}(0, k_1) + \sum_{m=0}^{\infty} D_m \operatorname{Gek}_{2m+2}(0, k_2)\alpha_{mn} = 0, \qquad (5.13)$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} C_m \operatorname{Fek}_{2m}(0, k_1)\,\beta_{nm} - D_n \operatorname{Gek}'_{2n+2}(0, k_2) = -\frac{l^2}{2\mu}\sum_{m=0}^{\infty} f_{nm} q_m. \qquad (5.14)$$

Dans ces formules q_m sont les coefficients du développement en série des contraintes normales sur le contour suivant les fonctions de Mathieu paires :

$$q_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sigma_\rho|_{\rho=0} \mathrm{ce}_{2m}(\theta, k_1)\,d\theta, \quad \sigma_\rho|_{\rho=0} = \sum_{m=0}^{\infty} q_m \mathrm{ce}_{2m}(\theta, k_1),$$

$$\alpha_{nm} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{se}'_{2m+2}(\theta, k_2)\, \mathrm{ce}_{2n}(\theta, k_1)\,d\theta +$$

$$+ \frac{2k_2}{\pi}\int_0^{2\pi}\left[\sin\theta\, \mathrm{ce}_{2n}(\theta, k_1)\int_0^{\theta} \sin\theta_1\, \mathrm{se}_{2m+2}(\theta_1, k_2)\,d\theta_1\right]d\theta, \tag{5.15}$$

$$f_{nm} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left[\sin\theta\, \mathrm{se}_{2n+2}(\theta, k_2)\int_{\pi/2}^{\theta} \sin\theta_1\, \mathrm{ce}_{2m}(\theta_1, k_1)\,d\theta_1\right]d\theta,$$

$$\beta_{nm} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{ce}'_{2m}(\theta, k_1)\, \mathrm{se}_{2n+2}(\theta, k_2)\,d\theta +$$

$$+ \frac{2k_2}{\pi}\int_0^{2\pi}\left[\sin\theta\, \mathrm{se}_{2n+2}(\theta, k_2)\int_{\pi/2}^{\theta} \sin\theta_1\, \mathrm{ce}_{2m}(\theta_1, k_1)\,d\theta_1\right]d\theta.$$

Utilisant le développement en séries de Fourier pour les fonctions $\mathrm{ce}_{2n}(\theta, k_1)$ et $\mathrm{se}_{2n+2}(\theta, k_2)$ on peut montrer que

$$\alpha_{nm} = \sum_{r=0}^{\infty} 2rA_{2r}^{(2n)} B_{2r}^{(2m+2)} +$$

$$+ \frac{k_2}{2}\sum_{r=0}^{\infty} \frac{B_{2r+2}^{(2m+2)}}{(2r+1)(2r+3)}[(2r+3)A_{2r}^{(2n)} + (2r+1)A_{2r+3}^{(2n)} - 4(r+1)A_{2r+2}^{(2n)}],$$

$$\beta_{nm} = -\alpha_{nm},$$

$$f_{nm} = -\frac{1}{2}A_0^{(2m)} B_2^{(2n+2)} +$$

$$+ \frac{1}{4}\sum_{r=1}^{\infty} \frac{A_{2r}^{(2m)}}{4r^2-1}[4rB_{2r}^{(2n+2)} - (2r-1)B_{2r+2}^{(2n+2)} - (2r+1)B_{2r-2}^{(2n+2)}].$$

Par conséquent, dans le cas d'une charge normale donnée sur le contour de la coupure notre problème se ramène à la détermination

des constantes C_n, D_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ des deux systèmes infinis (5.13) et (5.14).

Déterminons les contraintes normales aux points de l'axe réel sur le prolongement de la coupure

$$\sigma_\theta|_{\theta=0} = \frac{2\mu}{l^2 \operatorname{sh}^3 \rho}\left[\operatorname{sh}\rho\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial\rho\,\partial\theta}\right)_{\theta=0} + \right.$$

$$\left. + \operatorname{ch}\rho\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\rho} + \frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)_{\theta=0}\right] - \frac{\lambda\rho\omega^2\varphi}{\lambda+2\mu}\bigg|_{\theta=0}. \qquad (5.16)$$

Dans ce cas, compte tenu de (5.16), le coefficient d'intensité des contraintes K est égal à

$$K = \lim_{\rho\to 0}\left[\sqrt{2\pi s}\,\sigma_\theta|_{\theta=0}\right] = \frac{\mu\sqrt{\pi l}}{l^2}\lim_{\rho\to 0}\left(\frac{\partial^3\varphi}{\partial\rho\,\partial\theta^2} - \frac{\partial^3\psi}{\partial\rho^2\,\partial\theta}\right)_{\theta=0}$$

$(\sqrt{s} = \sqrt{2l}\operatorname{sh}\rho/2)$. Portant les expressions de φ et ψ et passant à la limite, nous obtenons

$$K = \frac{\mu\sqrt{\pi l}}{l^2}\sum_{m=0}^{\infty}\left[C_m \operatorname{Fek}'_{2m}(0, k_1)\operatorname{ce}''_{2m}(0, k_1) - \right.$$

$$\left. - D_m \operatorname{Gek}''_{2m+2}(0, k_2)\operatorname{se}'_{2m+2}(0, k_2)\right]. \qquad (5.17)$$

Etant donné les relations

$$\operatorname{ce}''_{2m}(0, k_1) = (2k_1 - a_{2m})\operatorname{ce}_{2m}(0, k_1),$$

$$\operatorname{Gek}''_{2m+2}(0, k_2) = (b_{2m+2} - 2k_2)\operatorname{Gek}_{2m+2}(0, k_2),$$

on peut écrire l'expression (5.17) sous la forme

$$K = \frac{\mu\sqrt{\pi l}}{l^2}\sum_{m=0}^{\infty}\left[C_m \operatorname{Fek}'_{2m}(0, k_1)(2k_1 - a_{2m})\operatorname{ce}_{2m}(0, k_1) - \right.$$

$$\left. - D_m \operatorname{Gek}_{2m+2}(0, k_2)(b_{2m+2} - 2k_2)\operatorname{se}'_{2m+2}(0, k_2)\right], \qquad (5.18)$$

où a_{2m}, b_{2m+2} sont les valeurs propres des fonctions de Mathieu $\operatorname{ce}_{2m}(\theta, k_1)$, $\operatorname{se}_{2m+2}(\theta, k_2)$ respectivement.

Dans les calculs par la formule (5.18), la principale difficulté réside dans la résolution des systèmes (5.13) et (5.14). Toutefois pour des k_1 et k_2 petits, les choses se simplifient.

Pour les matériaux réels, les valeurs des arguments k_1, k_2 des fonctions de Mathieu au moyen desquelles on représente la solution sont les suivantes :

$$k_1 = \frac{\omega^2 l^2 \rho_0}{4(\lambda + 2\mu)} \sim 0{,}74\cdot 10^{-12}(\omega l)^2,$$

$$k_2 = \frac{\omega^2 l^2 \rho_0}{4\mu} \sim 2{,}5\cdot 10^{-12}(\omega l)^2.$$

On voit donc que même pour des k_1 et k_2 petits, la gamme de fréquences est assez étendue (à la différence des problèmes de diffraction) et couvre les fréquences les plus importantes pour le problème considéré (pour le moins jusqu'à $\omega l \sim 10^5$). Toujours dans l'hypothèse de k_1 et k_2 petits, on peut utiliser pour calculer les fonctions de Mathieu les formules asymptotiques ainsi que les relations connues

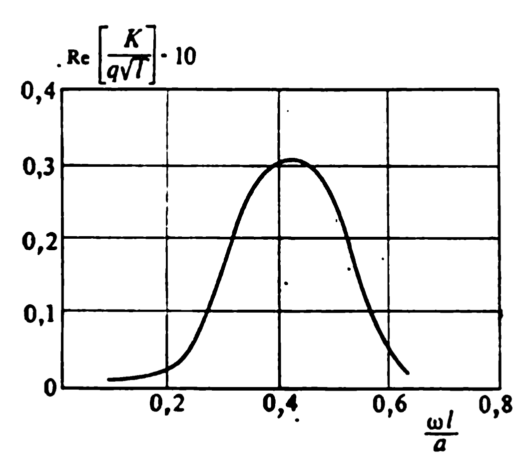


Fig. 30. Le coefficient K en fonction de la fréquence ω.

$$\mathrm{Fek}'_{2m}(0, k_1) = -\frac{1}{\pi}\frac{p_{2m}}{A_0^{(2m)}}\,\mathrm{ce}_{2m}\left(\frac{\pi}{2}, k_1\right),$$

$$\mathrm{Gek}_{2m+2}(0, k_2) = \frac{1}{\pi}\frac{s_{2m+2}\,\mathrm{se}'_{2m+2}\left(\frac{\pi}{2}, k_2\right)}{k_2 B_2^{(2m+2)}},$$

$$\mathrm{Fek}_0(0, k_1) \approx -\frac{\sqrt{2}}{4\pi}\ln k_1,$$

$$\mathrm{Fek}_{2m}(0, k_1) \approx -\frac{1}{2\pi}2^{4m-1}(2m-1)!\,(2m)!\,\frac{1}{k_1^{2m}} + \frac{i}{2}\mathrm{ce}_{2m}(0, k_1),$$

$$\mathrm{Gek}'_{2m+2}(0, k_2) \approx -\frac{1}{2\pi}2^{4m+3}[(2m+2)!]^2\frac{1}{k_2^{2m}} + \frac{i}{2}\mathrm{se}'_{2m+2}(0, k_2).$$

Les résultats du calcul numérique de la grandeur sans dimension $|K/q\sqrt{l}|$ en fonction de $\omega l/a$ sont représentés sur la figure 30 pour $q(\theta) = q = \mathrm{const}$.

Le résultat obtenu ici concorde avec celui trouvé dans [138] où l'on résout un problème de l'incidence d'une onde sur une coupure de longueur finie.

CHAPITRE V

APPLICATION DES FONCTIONS ANALYTIQUES DANS LES PROBLÈMES BIDIMENSIONNELS

§ 1. Torsion des barres

On a montré au § 3 du chapitre III que le problème de torsion des barres se ramène à la définition, dans le domaine occupé par la section de celle-ci, d'une fonction harmonique $\varphi(x, y)$, dite *fonction de torsion*, ayant sur le contour une valeur donnée de la dérivée normale, ou d'une fonction harmonique $\psi(x, y)$, prenant sur le contour une valeur donnée.

Formons une fonction de torsion complexe [95]

$$F(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y). \tag{1.1}$$

Utilisant la relation (3.4) du chapitre III nous obtenons une représentation des contraintes sous la forme

$$\tau_{xz} - i\tau_{yz} = \mu\tau[F'(z) - iz]. \tag{1.2}$$

Les conditions aux limites (compte tenu de (3.13), ch. III) peuvent alors s'écrire sous la forme

$$i[\overline{F(t)} - F(t)] = t\bar{t} + C_k. \tag{1.3}$$

Supposons que la section de la barre est un domaine simplement connexe D^+ et que la fonction $z = \omega(\zeta)$ réalise une application conforme d'un disque unité pris dans le plan de ζ sur D^+. Effectuons un changement de variables dans l'expression de $F(z)$ et notons la fonction ainsi obtenue $f(\zeta)$. Récrivons la condition aux limites (1.3) sous la forme

$$i[\overline{f(\sigma)} - f(\sigma)] = t\bar{t} = \omega(\sigma)\,\overline{\omega(\sigma)}. \tag{1.4}$$

Multiplions les deux membres de cette égalité par $\dfrac{1}{2\pi i}\dfrac{d\sigma}{\sigma - \zeta}$ $(|\zeta| < 1)$ et intégrons suivant le cercle $|\sigma| = 1$ (action de l'opérateur de Cauchy). D'après le théorème de Cauchy, l'intégrale du premier terme du premier membre de l'égalité reconstitue la fonction $f(\zeta)$. Pour calculer l'intégrale du second terme il convient d'utiliser la formule (1.75) du chapitre I. Celle-ci s'annule puisque

l'on peut négliger la constante a_0 qui n'a pas d'influence sur l'état de contrainte, de sorte que nous obtenons en définitive

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\sigma|=1} \frac{\omega(\sigma)\overline{\omega(\sigma)}}{\sigma - \zeta}\, d\sigma, \tag{1.5}$$

ce qui fournit immédiatement la solution du problème. De plus, si la fonction $\omega(\zeta)$ est rationnelle, l'intégrale (1.5) se calcule explicitement.

Pour calculer les contraintes tangentielles il nous reste à reprendre la formule (1.2). Le plus intéressant serait de connaître la contrainte dirigée en chaque point du contour suivant la tangente correspondante. Nous obtiendrons la formule cherchée sans effectuer une rotation des axes de coordonnées. Introduisons des coordonnées curvilignes correspondant par une application conforme à une famille de cercles concentriques $\rho = \text{const}$ et à un faisceau de droites $\theta = \text{const}$ passant par l'origine des coordonnées. Soit $\boldsymbol{A}$ un vecteur de composantes A_x et A_y en coordonnées cartésiennes. Ces mêmes composantes seront notées en coordonnées curvilignes A_ρ et A_θ. Il est évident qu'on a alors l'égalité

$$A_\rho + iA_\theta = e^{-i\alpha}(A_x + iA_y), \tag{1.6}$$

où α est l'angle formé par la direction positive de la courbe de coordonnées correspondante $\theta = \text{const}$ et l'axe x (fig. 31). Pour déterminer $e^{-i\alpha}$ nous procédons de la manière suivante. Imprimons au point z un déplacement dz dans la direction de la courbe indiquée. Le point correspondant ζ se déplacera alors d'une grandeur $d\zeta$ dans la direction radiale. Les égalités $dz = e^{i\alpha}|dz|$ et $d\zeta = e^{i\theta}|d\zeta|$ nous donnent

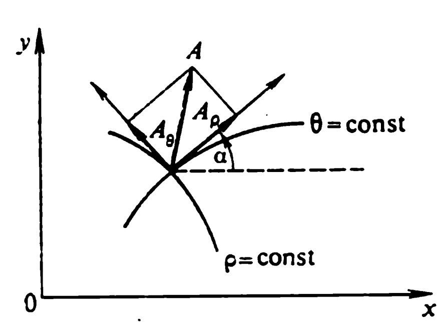


Fig. 31. Coordonnées curvilignes correspondant à une application conforme.

$$e^{-i\alpha} = \frac{|dz|}{dz} = \frac{|\omega'(\zeta)|}{\omega'(\zeta)}\,\frac{|d\zeta|}{d\zeta} = \tag{1.7}$$

$$= e^{-i\theta}\,\frac{|\omega'(\zeta)|}{\omega'(\zeta)} = \frac{\rho}{\zeta}\,\frac{|\omega'(\zeta)|}{\omega'(\zeta)}.$$

Dans notre cas, la formule cherchée est

$$T_\rho - iT_\theta = \frac{\zeta}{\rho}\,\frac{\omega'(\zeta)}{|\omega'(\zeta)|}(\tau_{xz} - i\tau_{yz}) = \frac{\mu\tau\zeta}{\rho|\omega'(\zeta)|}\,[f'(\zeta) - i\overline{\omega(\zeta)}\omega'(\zeta)]. \tag{1.8}$$

Considérons à titre d'exemple le cas où le domaine D^+ est limité par une épitrochoïde d'équation paramétrique

$$x = R(\cos\theta + m\cos n\theta) \quad (n \text{ est entier}),$$
$$y = R(\sin\theta + m\sin n\theta) \quad \left(R > 0,\ 0 \leqslant m \leqslant \frac{1}{n}\right). \qquad (1.9)$$

La fonction réalisant l'application conforme est de la forme

$$z = \omega(\zeta) = R(\zeta + m\zeta^n). \qquad (1.10)$$

Explicitons l'expression du numérateur de la fonction sous l'intégrale dans (1.5) :

$$\omega(\sigma)\overline{\omega(\sigma)} = R^2\left(1 + m^2 + m\sigma^{n-1} + \frac{m}{\sigma^{n-1}}\right). \qquad (1.11)$$

Ceci étant, nous avons

$$f(\zeta) = i\frac{R^2}{m}\zeta^{n-1}. \qquad (1.12)$$

Nous nous bornerons à donner l'expression définitive de la seule composante T_θ sur le contour pour $\rho = 1$ (la composante T_ρ s'annule évidemment) :

$$T_\theta = \mu\tau Rm \frac{n + \frac{2}{m}\cos(n-1)\theta + \frac{1}{m^2}}{\sqrt{n^2 + 2\frac{n}{m}\cos(n-1)\theta + \frac{1}{m^2}}}. \qquad (1.13)$$

La valeur maximale de la contrainte tangentielle, atteinte aux points qui sont les racines de l'équation $\cos(n-1)\theta = -1$, s'avère égale à

$$T_{max} = \mu\tau R\frac{1 - m + nm^2}{1 - nm}. \qquad (1.14)$$

Comme les problèmes de flexion des poutres se ramènent également à des problèmes harmoniques (cf. § 3, ch. III), l'utilisation de l'appareil des variables complexes dans leur cas n'apporte rien de nouveau.

Passons à l'étude du problème de torsion d'une poutre composée. Vu les grandes difficultés apparaissant au cours de la résolution de ce problème dans sa forme générale, limitons-nous à la considération d'un cas relativement simple (la construction de la solution est même dans ce cas assez difficile). Supposons que dans une poutre creuse faite d'un matériau à coefficient de Lamé μ, délimitée de l'extérieur par un cylindre circulaire L_2 et comportant une cavité elliptique de contour L_1, est insérée une poutre de matériau à coefficient de Lamé μ_1, de façon à remplir entièrement la cavité. Nous désignerons le domaine correspondant par D.

Conformément au système de notations adopté, nous sommes conduits au problème concernant le domaine D_2^+ situé à l'intérieur d'un disque de rayon R et lorsque la composante tangentielle des contraintes subit sur le contour elliptique L_1 une discontinuité.

On recherche dans les domaines D_1^+ et D les fonctions de torsion complexes $F_1(z)$ et $F_2(z)$ qu'on définit à partir des conditions

$$F(t) + \overline{F(t)} = 0 \quad (t \in L_2), \tag{1.15}$$

$$\mu_1[F_1(t) + \overline{F_1(t)}] - \mu[F(t) + \overline{F(t)}] = (\mu - \mu_1)t\bar{t} \quad (t \in L_1), \tag{1.16}$$

$$[F_1(t) - \overline{F_1(t)}] - [F(t) - \overline{F(t)}] = 0 \quad (t \in L_1). \tag{1.17}$$

La formule (1.16) exprime la condition d'égalité des composantes normales de la contrainte tangentielle dans les deux sens d'approche du contour, et la condition (1.17), l'égalité des déplacements. Conformément à [134] introduisons sur le contour L_2 une fonction auxiliaire $\omega(t)$ vérifiant la condition

$$F(t) - \overline{F(t)} = 2\omega(t). \tag{1.18}$$

A l'aide de (1.15) nous obtenons sur le contour L_2

$$F(t) = \omega(t). \tag{1.19}$$

Introduisons une intégrale du type Cauchy à densité $\omega(t)$ que nous représenterons, en vertu des formules de Sokhotski-Plémelj (1.14), ch. I, comme la différence des valeurs limites. On peut alors récrire (1.19) sous la forme

$$F(t) - \lim_{z\to t,\, z\in D_2^+} \frac{1}{2\pi i}\int_{L_2} \frac{\omega(t)}{t-z}\,dt = - \lim_{z\to t,\, z\in D_2^-} \frac{1}{2\pi i}\int_{L_2} \frac{\omega(t)}{t-z}\,dt. \tag{1.20}$$

A gauche figurent des fonctions analytiques dans D, à droite des fonctions analytiques dans D_2^-. Comme leurs valeurs limites se confondent, elles doivent représenter une même fonction analytique dans le domaine $D^* = D \cup D_2^-$, que nous noterons $F^*(z)$. On a donc démontré que la fonction

$$F^*(z) = F(z) - \frac{1}{2\pi i}\int_{L_2} \frac{\omega(t)}{t-z}\,dt \tag{1.21}$$

admet un prolongement analytique en dehors du contour L_2.

Poursuivant nos raisonnements nous obtiendrons à une étape donnée une équation intégrale qui nous permettra de définir la fonction $\omega(t)$. Si la solution de cette équation est recherchée comme développement en série de la fonction inconnue, alors il semble rationnel d'y procéder dès maintenant, ce qui simplifiera quelque

peu les calculs. Dans cet ordre d'idées, développons la fonction $\omega(t)$ en série de Fourier :

$$\omega(t) = \sum_{n=0}^{\infty}{}' \alpha_n \left[\left(\frac{t}{R} \right)^n - \left(\frac{R}{t} \right)^n \right] \quad \left(\alpha_n = \frac{R^n}{2\pi i} \int_{L_2} \frac{\omega(t)}{t^{n+1}}\, dt \right), \quad (1.22)$$

n'oubliant pas que $\omega(t)$ est une fonction imaginaire. Le cran dont est affecté le signe somme signifie que la sommation porte sur les indices pairs.

Des conditions de symétrie nous déduisons que tous les coefficients sont des nombres réels. La somme correspondant au terme complémentaire figurant dans (1.21) sera alors

$$\sum_{n=0}^{\infty}{}' \alpha_n \left(\frac{z}{R} \right)^n .$$

Portant maintenant l'expression de $F^*(z)$ dans les conditions (1.16) et (1.17), nous obtenons

$$\mu_2[F^*(t) + \overline{F^*(t)}] - \mu[F_1(t) + \overline{F_1(t)}] =$$
$$= (\mu_2 - \mu) t\bar{t} - \mu_2 \sum_{n=1}^{\infty}{}' \alpha_n \left[\left(\frac{t}{R} \right)^n + \left(\frac{\bar{t}}{R} \right)^n \right], \quad (1.16')$$

$$[F^*(t) - \overline{F^*(t)}] - [F_1(t) - \overline{F_1(t)}] =$$
$$= - \sum_{n=1}^{\infty}{}' \alpha_n \left[\left(\frac{t}{R} \right)^n - \left(\frac{\bar{t}}{R} \right)^n \right] - 2\alpha_0 . \quad (1.17')$$

Eliminant $\overline{F_1(t)}$, nous aboutissons à l'égalité

$$F^*(t) - \lambda \overline{F^*(t)} - (1 + \lambda) F_1(t) = f(t), \quad (1.23)$$

où

$$\lambda = \frac{\mu - \mu_1}{\mu + \mu_1},$$

$$f(t) = - \left[(1 + \lambda)\alpha_0 + \lambda + \bar{t} + \sum_{n=1}^{\infty}{}' \alpha_n \left[\left(\frac{t}{R} \right)^n - \lambda \left(\frac{\bar{t}}{R} \right)^n \right] \right].$$

Multiplions les deux membres de cette équation par $\frac{1}{2\pi i} \frac{dt}{t - z}$ $(z \in D_1^-)$ et intégrons suivant le contour L_1. Nous obtenons alors pour la fonction $F^*(z)$ l'équation fonctionnelle

$$F^*(z) - \lambda \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{F^*(t)}{t - z}\, dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{f(t)}{t - z}\, dt. \quad (1.24)$$

On a tenu compte ici de ce que l'intégrale de la fonction $F_1(t)$ est nulle puisque celle-ci est analytique dans D_1^+.

Pour résoudre l'équation (1.24) utilisons l'application conforme du domaine D sur l'extérieur d'un disque de rayon ρ, choisi de telle sorte que la fonction réalisant l'application soit de la forme *)

$$z = A\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right), \quad \mathrm{mod}\,|\zeta| = \rho, \quad z \in L_1. \tag{1.25}$$

A l'aide de cette fonction réalisons des transformations nécessaires. On a l'égalité (le cran signifie que la sommation porte sur les indices impairs)

$$\sum_{n=1}^{\infty}{}' \alpha_n \left(\frac{t}{R}\right)^n = b_0 + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \left(\sigma^j + \frac{1}{\sigma^j}\right), \tag{1.26}$$

et il est aisé d'exprimer les coefficients b_j au moyen des α_n, on a:

$$b_\nu = \sum_{n=E(\nu)}^{\infty}{}^{*} C_n^{\frac{n-\nu}{2}} \left(\frac{A}{R}\right)^n \alpha_n \quad (\nu = 0, 1, \ldots),$$

où $E(0) = 2$ et $E(\nu) = \nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$. L'astérisque indique que n est de même parité que ν.

Représentons maintenant la fonction $F^*(z)$ par son développement en série

$$F^*(z) = F^*(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty}{}' a_n \frac{1}{\zeta^n}. \tag{1.27}$$

Reste à calculer deux intégrales du type Cauchy

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{dt}{\zeta^n (t - z)}$$

figurant dans (1.24). Examinons en détail l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{dt}{t - z}.$$

Considérons le cas le plus simple $(n = 0)$ et effectuons sur l'expression sous l'intégrale les transformations nécessaires :

$$\frac{dt}{t - z} = \frac{d\zeta\left(1 - \dfrac{1}{\zeta^2}\right)}{\left(\sigma - \zeta + \dfrac{1}{\sigma} - \dfrac{1}{\zeta}\right)} = \frac{(\zeta^2 - 1)\, d\zeta}{\zeta^2(\sigma - \zeta)\left(1 - \dfrac{1}{\sigma\zeta}\right)} =$$

$$= \frac{(\zeta^2 - 1)\, d\zeta}{\zeta^2(\sigma - \zeta)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(\sigma\zeta)^j}. \tag{1.28}$$

*) Il est clair qu'on peut réaliser l'application sur l'extérieur d'un disque unité également, mais alors l'application doit être prise sous la forme $A(\zeta + m/\zeta)$.

Nous aboutissons finalement (dans le plan de ζ) à des intégrales du type Cauchy qui se calculent de façon élémentaire. Le second membre de (1.24) se calcule d'une manière analogue, passant, bien entendu, dans l'expression de $f(t)$ à la variable σ. Egalant les coefficients des mêmes puissances de $1/\zeta$ dans les premier et second membres de (1.24), nous aboutissons à une relation entre les coefficients a_n et b_n, qui s'écrit

$$a_n = \lambda \frac{\rho^{2n}}{\lambda + \rho^{2n}} \left[(\rho^{2n} - \rho^{-2n}) b_n + A^2 \varepsilon_n \left(\rho^2 - \frac{1}{\rho^2} \right) \right], \quad (1.29)$$

où $\varepsilon_n = -1$ pour $n = 2$ et $\varepsilon_n = 0$ pour les autres valeurs de n.

Reprenons la formule (1.18), où nous effectuerons préalablement un passage à la fonction $F^*(t)$ conformément à (1.21). Nous obtenons

$$F^*(t) - \overline{F^*(t)} = \omega(t) + \alpha_0 = 2\alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{1}{\zeta_0^n} - \frac{1}{\bar{\zeta}_0^n} \right). \quad (1.30)$$

L'indice « 0 » précise que les points considérés sont ceux du contour correspondant au cercle L_2. Exprimant $1/\zeta_0^n$ et $2/\bar{\zeta}_0^n$ par t (compte tenu de (1.22)) et égalant les coefficients des mêmes puissances de t, nous obtenons l'ensemble des égalités, à savoir

$$\alpha_m = -\left(\frac{A}{R} \right)^m \sum_{n=E^*(m)}^{m} \left[C_{m-1}^{\frac{m-n}{2}} - C_{m-1}^{\frac{1}{2}(m-n)-1} \right] a_n \quad (m = 1, 2, \ldots), \quad (1.31)$$

où $E^*(m) = 1$ ou 2 suivant que m est impair ou pair. Portant maintenant dans (1.31) les expressions des a_n en fonction des b_n, c'est-à-dire sous la forme (1.29), et passant ensuite des b_n aux α_n, nous obtenons un système d'équations par rapport aux inconnues α_n. Notons que ce système est diagonal.

§ 2. Problème plan de l'élasticité. Flexion des plaques

Récrivons la loi de Hooke pour la déformation plane et l'état plan généralisé de contrainte, en représentant les contraintes par la fonction d'Airy

$$\lambda\theta + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad \lambda\theta + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad (2.1)$$

$$\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \, \partial y}.$$

Portant dans les deux premières relations les expressions de θ par la fonction de contraintes d'Airy $\theta = \frac{1}{2(\lambda+\mu)}\Delta U$, nous obtenons

$$2\mu\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}P, \quad 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}P, \quad (2.2)$$

où l'on a introduit la notation $P = \Delta u$. Comme

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = P - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = P - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2},$$

alors portant ces égalités dans (2.2) nous obtenons

$$2\mu\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)}P, \quad 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)}P. \quad (2.3)$$

Soit Q la conjuguée de la fonction analytique P. Ceci permet d'introduire la fonction analytique

$$f(z) = P(x, y) + iQ(x, y),$$

ainsi que la fonction analytique

$$\varphi(z) = \frac{1}{4}\int f(z)\, dz = p + iq.$$

Des deux dernières relations découle $\varphi'(z) = 1/4 f(z)$ ou, écrivant cette relation en détail,

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial y} = \frac{1}{4}P, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\partial q}{\partial x} = -\frac{1}{4}Q.$$

Transformons maintenant les relations (2.3) à l'aide des fonctions introduites plus haut :

$$2\mu\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{2(\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}\frac{\partial p}{\partial x},$$

$$2\mu\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{2(\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}\frac{\partial q}{\partial y}.$$

Intégrant, nous obtenons

$$2\mu u = -\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{2(\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}p + f_1(y).$$

$$2\mu v = -\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{2(\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}q + f_2(x),$$

où $f_1(y)$ et $f_2(x)$ sont des fonctions arbitraires. Portons ces expressions dans la troisième relation (2.1) :

$$\frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}\left(\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial q}{\partial x}\right) + [f_1'(y) + f_2'(x)] = 0.$$

Les fonctions p et q étant conjuguées, le premier terme est nul et, par conséquent, le second terme aussi. Ceci étant, les fonctions $f_1(y)$ et $f_2(x)$ peuvent être représentées sous la forme :

$$f_1 = -\varepsilon y + \alpha, \quad f_2 = \varepsilon x + \beta,$$

ce qui correspond à un déplacement du corps en tant que tout rigide (ε, α et β sont des constantes qu'on pose nulles). Nous obtenons en définitive

$$2\mu u = -\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{2(\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} p, \quad 2\mu v = -\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{2(\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} q. \quad (2.4)$$

Composons une nouvelle fonction $p_1 = U - px - qy$. Par calculs immédiats (utilisant le lien qui existe entre $\varphi(z)$ et $f(z)$) on peut montrer que cette fonction est harmonique. Dans ce cas

$$U(x, y) = px + qy + p_1.$$

Introduisons une autre fonction $\chi(z)$, dont la partie réelle est la fonction p_1. Il s'avère alors possible de représenter la relation précédente par deux fonctions analytiques d'une variable complexe :

$$U(x, y) = \mathrm{Re}[\bar{z}\varphi(z) + \chi(z)]. \quad (2.5)$$

L'expression (2.5) s'appelle *formule de Goursat.*

Les développements ultérieurs ont pour but d'exprimer les déplacements et les contraintes par les fonctions $\varphi(z)$ et $\chi(z)$. Dérivons par rapport aux arguments x et y les deux membres de (2.5) et formons une nouvelle fonction

$$f(x, y) = \frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial U}{\partial y}.$$

A la différence des expressions de chacune des dérivées $\partial U/\partial x$ et $\partial U/\partial y$, celle de la somme $\partial U/\partial x + i\, \partial U/\partial y$ s'écrit sous une forme compacte :

$$f(x, y) = \frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial U}{\partial y} = \varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)}, \quad (2.6)$$

où pour simplifier l'écriture nous avons introduit une nouvelle fonction $\psi(z) = \chi'(z)$. Utilisant les relations (2.4) et (2.6), écrivons

l'expression pour la combinaison $u + iv$:

$$2\mu(u + iv) = -[\varphi(z) + \overline{z\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)}] + \frac{2(\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}\varphi(z) =$$

$$= \varkappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi'(z)}. \quad (2.7)$$

Dans le cas d'une déformation plane la constante $\varkappa = 3 - 4\nu$ et dans le cas d'un état de contrainte plan, $\varkappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$.

Pour exprimer les contraintes par des fonctions analytiques d'une variable complexe il convient de dériver une deuxième fois les expressions $\partial U/\partial x$ et $\partial U/\partial y$. Les relations ainsi obtenues sont très complexes, toutefois on peut les représenter sous une forme compacte

$$\begin{gathered}\sigma_x + \sigma_y = 4\mathrm{Re}[\Phi(z)],\\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2[\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)] \\ (\Phi(z) = \varphi'(z), \quad \Psi(z) = \psi'(z)).\end{gathered} \quad (2.8)$$

Sous cette forme il est également commode de représenter les composantes des contraintes dans un système de coordonnées tourné d'un certain angle α par rapport au système initial. A l'aide des formules (1.19), (1.20) et (1.22) du chapitre II on établit les égalités

$$\begin{gathered}\sigma'_x + \sigma'_y = 4\mathrm{Re}[\Phi(z)],\\ \sigma'_y - \sigma'_x + 2i\tau'_{xy} = 2[\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)]e^{2i\alpha}.\end{gathered} \quad (2.8')$$

Combinant ces expressions nous parvenons à la formule utile

$$\sigma'_y + i\tau'_{xy} = \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} - e^{2i\alpha}[\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)]. \quad (2.8'')$$

Les relations (2.8), (2.8'), (2.8'') sont dites *formules de Kolossov-Muskhelishvili* [95, 48]. On utilisera dans la suite aussi bien le couple de fonctions $\varphi(z)$, $\psi(z)$ que le couple $\Phi(z)$, $\Psi(z)$. Donc, pour déterminer la contrainte tangentielle il faut connaître la partie imaginaire de la seconde relation (2.8), et pour déterminer les contraintes normales, résoudre le système correspondant du deuxième ordre.

Considérons maintenant dans le domaine occupé par un corps élastique un petit arc ds et proposons-nous de déterminer le vecteur des contraintes appliquées à cet arc. Soient $l = \cos(n, x)$ et $m = \cos(n, y)$ les cosinus directeurs de la direction positive de la normale à l'arc ds. Comme $l = dy/ds$, $m = -dx/ds$, les projections du vecteur des contraintes s'expriment en vertu des relations

(1.6), ch. II :

$$\sigma_{x\nu} = \sigma_x l + \tau_{xy} m = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}\frac{dx}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right),$$

$$\sigma_{y\nu} = \tau_{xy} l + \sigma_y m = -\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}\frac{dy}{ds} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\frac{dx}{ds} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right).$$

La combinaison $\sigma_{x\nu} + i\sigma_{y\nu}$ peut alors être représentée sous la forme

$$\sigma_{x\nu} + i\sigma_{y\nu} = \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial U}{\partial y} - i\frac{\partial U}{\partial x}\right) =$$

$$= -i\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial U}{\partial y}\right) = -i\frac{d}{ds}\,[\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)}].$$

Envisageons maintenant un arc de longueur finie avec ses extrémités aux points A et B et déterminons le vecteur des efforts $P_x + iP_y$ s'exerçant sur celui-ci du côté de la normale positive :

$$P_x + iP_y = \int\limits_{AB} (\sigma_{x\nu} + i\sigma_{y\nu})\,ds = -i[\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)}]_A^B. \qquad (2.9)$$

Supposant le point A fixe (point z_0 de l'arc) et le point B variable, nous obtenons une relation très importante pour la suite :

$$\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} = \int\limits_{z_0}^{z} (\sigma_{x\nu} + i\sigma_{y\nu})\,ds + \text{const.} \qquad (2.10)$$

On peut montrer que l'intensité du moment résultant des forces sollicitant l'arc AB par rapport à l'origine des coordonnées est égale à

$$M = \mathrm{Re}[\chi(z) - z\psi(z) - z\bar{z}\varphi'(z)]_A^B. \qquad (2.11)$$

Abordons la question de la définition des fonctions introduites plus haut. Le fait est que dans le domaine occupé par le corps élastique, les grandeurs ayant une signification physique, à savoir les déplacements et les contraintes, doivent être univoques.

Reportons-nous aux formules de Kolossov-Muskhelishvili (2.8) tout en supposant le domaine considéré fini et simplement connexe. La première égalité implique que la fonction $\Phi(z)$ est définie au terme Ci près (où C est une constante réelle) et la seconde, que la fonction $\Psi(z)$ est définie de façon univoque. Aussi les fonctions $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ sont-elles définies à des constantes additives près de la forme $Ciz + \gamma$ et γ', où γ et γ' sont des constantes complexes arbitraires. Ayant établi que les fonctions $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ sont définies à des constantes additives près, nous devons nous attendre qu'il

en sera de même des déplacements. Pour l'établir, substituons dans les formules (2.4) $\varphi_0 = Ciz + \gamma$ et $\psi_0 = \gamma'$. Pour les déplacements correspondants u et v, nous obtenons alors l'expression

$$(\Delta u + i\Delta v) = 2\mu[(\varkappa + 1)\, Ciz + \varkappa\gamma - \overline{\gamma}']. \tag{2.12}$$

On voit que les déplacements Δu et Δv traduisent une translation du corps en tant que tout rigide. Si l'on veut définir les déplacements de façon univoque, il faut poser $C = 0$ et lier les constantes γ et γ' par la relation $\varkappa\gamma = \overline{\gamma}'$.

Soit maintenant L un contour fermé et supposons que les fonctions $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ sont définies à des constantes indiquées plus haut près. Les expressions (2.9) et (2.11) nous donnent alors, comme il fallait s'y attendre, des valeurs nulles pour le vecteur résultant et le moment des efforts s'exerçant dans le domaine délimité par le contour L.

Des résultats non triviaux sont obtenus dans le cas où l'on considère un domaine multiplement connexe, c'est-à-dire un domaine délimité par des contours $L_0, L_1, L_2, \ldots, L_m$, dont l'un, L_0, englobe tous les autres, disjoints. Les composantes du tenseur des contraintes et du vecteur des déplacements seront supposées comme auparavant des fonctions univoques. On propose dans [95] une interprétation physique du cas où les déplacements sont supposés des fonctions non univoques. L'univocité de l'expression $\operatorname{Re}\Phi(z)$ implique alors que la fonction $\Phi(z)$ elle-même est définie à une somme de la forme

$$\sum_{k=1}^{m} A_k \ln(z - z_k) \tag{2.13}$$

près. Ici z_k sont des points situés à l'intérieur des contours correspondants L_k, et $A_k = B_k/2\pi$, B_k désignant l'accroissement de la partie imaginaire de la fonction $\Phi(z)$ quand le contour L_k est parcouru dans le sens contraire des aiguilles d'une montre. La fonction $\Phi(z)$ se laisse donc représenter comme suit

$$\Phi(z) = \sum_{k=1}^{m} A_k \ln(z - z_k) + \Phi^*(z), \tag{2.14}$$

où $\Phi^*(z)$ est déjà une fonction univoque, analytique dans le domaine considéré. Par intégration immédiate nous obtenons que la fonction $\varphi(z)$ se représente sous la forme

$$\varphi(z) = z \sum_{k=1}^{m} A_k \ln(z - z_k) + \sum_{k=1}^{m} \gamma_k \ln(z - z_k) + \varphi^*(z), \tag{2.14'}$$

où γ_k sont des constantes complexes arbitraires, les coefficients A_k sont déterminés plus haut, et la fonction $\varphi^*(z)$ est univoque dans le domaine considéré. De la seconde relation (2.8) il découle

par ailleurs que la fonction $\Psi(z)$ est univoque. Intégrant, nous obtenons que la fonction $\psi(z)$ admet la représentation suivante :

$$\psi(z) = \sum_{k=1}^{m} \gamma_k' \ln(z - z_k) + \psi^*(z), \tag{2.15}$$

où γ_k' sont des constantes complexes arbitraires, $\psi^*(z)$ une fonction univoque.

Revenons de nouveau à l'étude des déplacements. Parcourant chacun des contours L_k, nous obtenons l'accroissement des déplacements sous la forme

$$2\mu(\Delta u + i\Delta v)|_{L_k} = 2\pi i[(\varkappa + 1)A_k z + \varkappa\gamma_k + \overline{\gamma}_k']. \tag{2.16}$$

La condition d'univocité des déplacements implique les égalités

$$A_k = 0, \quad \varkappa\gamma_k + \overline{\gamma}_k' = 0. \tag{2.17}$$

Par la suite nous aurons besoin du vecteur résultant $P_{xk}+iP_{yk}$ des efforts s'exerçant sur le contour L_k. Portant dans (2.9) (le parcours est réalisé dans le sens des aiguilles d'une montre) les expressions de $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ et négligeant les termes correspondant aux fonctions univoques φ^* et ψ^*, nous obtenons

$$P_{xk} + iP_{yk} = -2\pi(\gamma_k - \overline{\gamma}_k'). \tag{2.18}$$

Supposant les composantes du vecteur résultant données, nous obtenons les expressions des constantes complexes γ_k et γ_k' :

$$\gamma_k = -\frac{P_{xk} + iP_{yk}}{2\pi(1+\varkappa)}, \quad \gamma_k' = \frac{\varkappa(P_{xk} - iP_{yk})}{2\pi(1+\varkappa)}. \tag{2.19}$$

Portant celles-ci dans les formules (2.14) et (2.15), nous obtenons les représentations des fonctions $\varphi(z)$ et $\psi(z)$:

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= -\frac{1}{2\pi(1+\varkappa)} \sum_{k=1}^{m} (P_{xk} + iP_{yk}) \ln(z - z_k) + \varphi^*(z), \\ \psi(z) &= \frac{\varkappa}{2\pi(1+\varkappa)} \sum_{k=1}^{m} (P_{xk} - iP_{yk}) \ln(z - z_k) + \psi^*(z). \end{aligned} \tag{2.20}$$

En dernier lieu considérons le cas où le contour L_0 est absent, i.e. le cas où le domaine occupé par le corps élastique est infini (on peut y arriver, par exemple, en éloignant le contour L_0 dans l'infini). Alors pour tout point z situé en dehors d'un cercle centré à l'origine des coordonnées et englobant tous les contours L_k, on a l'égalité

$$\ln(z - z_k) = \ln z + \ln\left(1 - \frac{z_k}{z}\right).$$

Remarquons qu'en dehors de ce cercle le dernier terme est une fonction univoque. C'est pourquoi nous ramenons les fonctions $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ à la forme

$$\varphi(z) = \frac{P_x + iP_y}{2\pi(1+\varkappa)} \ln z + \varphi^{**}(z),$$

$$\psi(z) = \frac{\varkappa(P_x - iP_y)}{2\pi(1+\varkappa)} \ln z + \psi^{**}(z),$$

où les fonctions $\varphi^{**}(z)$ et $\psi^{**}(z)$ sont univoques en dehors du cercle, excepté peut-être au point à l'infini, et les constantes P_x et P_y sont les composantes globales des vecteurs résultants des forces extérieures appliquées à tous les contours L_k. Il est clair que le comportement des fonctions $\varphi^{**}(z)$ et $\psi^{**}(z)$ au point à l'infini doit correspondre aux contraintes admissibles en ce point. Nous supposerons qu'à l'infini les contraintes tendent vers des valeurs constantes. Dans les expressions des fonctions $\varphi^{**}(z)$ et $\psi^{**}(z)$ devront alors être présents des termes du type Γz et $\Gamma' z$:

$$\Gamma = B + iC, \quad \Gamma' = B' + iC', \quad B = \frac{1}{4}(\sigma_x^\infty + \sigma_y^\infty),$$

$$\sigma_y^\infty - \sigma_x^\infty + 2i\tau_{xy}^\infty = 2(B' + iC'),$$

où B, C, B', C' sont des constantes.

Ces constantes et les contraintes à l'infini sont liées par les relations

$$\sigma_x^\infty = 2B - B', \quad \sigma_y^\infty = 2B + B', \quad \tau_{xy}^\infty = C'. \tag{2.21}$$

Les fonctions φ^* et ψ^* tendent à l'infini vers des valeurs constantes (dont la grandeur n'influence naturellement pas les valeurs des contraintes à l'intérieur du domaine).

Formulons les problèmes aux limites directement pour les fonctions $\varphi(z)$ et $\psi(z)$. Commençons par le premier problème fondamental. La condition de continuité des déplacements jusqu'à la frontière est équivalente à la condition du prolongement continu de l'expression (2.7) en tous les points de la frontière. Passant dans les premier et second membres de l'égalité (2.7) aux points frontières, nous obtenons

$$-\varkappa\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = f(t). \tag{2.22}$$

La fonction $f(t)$ doit être connue.

Dans le cas du deuxième problème fondamental on peut partir de l'égalité (2.10) en supposant que les points z tendent vers les

points de la frontière et que l'arc suivant lequel on intègre constitue une partie de la frontière. Nous obtenons alors

$$\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = \int_{s_0}^{s} (\sigma_{xv} + i\sigma_{yv})\, ds + c = f(t) + c. \quad (2.23)$$

Il découle de (2.23) que si le vecteur résultant des forces appliquées au contour est nul, alors la fonction $f(t)$ est univoque. On montre que la nullité du vecteur résultant s'exprime par la condition

$$\operatorname{Re} \int_L \overline{f(t)}\, dt = 0. \quad (2.23')$$

Dans le cas d'un domaine multiplement connexe, seule l'une des constantes c peut être supposée arbitraire, les autres devant être tirées de la condition de l'univocité des déplacements obtenus au cours de la résolution du problème.

Pour un domaine multiplement connexe ou l'extérieur d'un contour, $f(t)$ peut ne pas être univoque lorsque $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ contiennent des fonctions non univoques (cf. (2.20)). On passera alors aux fonctions univoques $\varphi^*(z)$ et $\psi^*(z)$, ce qui impliquera automatiquement l'univocité des conditions aux limites. Bien entendu, quand les domaines contiennent des points infinis, il faut également inclure dans la formulation des problèmes les conditions à l'infini données par les formules (2.21).

Il est évident qu'une combinaison des conditions (2.23) et (2.22) permet de donner la description du problème mixte.

Envisageons une question d'importance. On n'exigeait en général pour la position des problèmes aux limites que le prolongement continu sur la frontière des expressions figurant dans les premiers membres de (2.22) et (2.23), mais par la suite nous exigerons la réalisation d'une condition beaucoup plus forte : le prolongement continu sur la frontière de chacun des termes $\varphi(z)$, $\varphi'(z)$ et $\psi(z)$. La solution vérifiant ces exigences sera dite *régulière*. Cette condition facilite grandement la justification des méthodes qu'on applique traditionnellement à la résolution des problèmes aux limites et qui font appel à l'appareil de la variable complexe.

Notons que les conditions aux limites du deuxième problème fondamental peuvent être formulées directement en contraintes à partir de la représentation (2.8″) où α est l'angle formé par la normale au contour avec l'axe x :

$$\Phi(t) + \overline{\Phi(t)} - e^{2i\alpha}[\bar{z}\Phi'(t) + \Psi(t)] = \sigma_{xv} + i\sigma_{yv}. \quad (2.24)$$

Pour le problème plan de l'élasticité sont valables les théorèmes d'unicité établis au chapitre III pour le cas général du problème spatial.

Calculons maintenant explicitement la fonction $f(t)$ à partir de l'expression (2.10). Nous supposerons donnée sur le segment d'arc une charge d'intensité constante p dirigée suivant la normale. Dans ce cas

$$\sigma_{x\nu} + i\sigma_{y\nu} = -p(l + im) = pi\left(\frac{dx}{ds} + i\frac{dy}{ds}\right) = pi\frac{dt}{ds}$$

et par conséquent

$$f(t) = i\int_{t_0}^{t}(\sigma_{x\nu} + i\sigma_{y\nu})\,dt = -pt + c. \tag{2.25}$$

Soit à présent un contour constitué de trois segments: le premier (du point t_0 au point t_1) est libre, le second (jusqu'au point t_2) soumis à une pression hydrostatique d'intensité p et le troisième (jusqu'au point t_3) libre lui aussi. Alors sur le premier segment $f(t) = 0$ (la constante est posée nulle), sur le second $f(t) = -pt + pt_1$ (la constante correspondante est tirée de la condition de continuité de la fonction $f(t)$ au point t_1) et sur le troisième $f(t) = p(t_1 - t_2)$. Passons maintenant à la limite, faisant tendre le point t_2 vers t_1 et augmentant p de façon à maintenir constant le produit $p|t_2 - t_1|$. On conçoit que sur les premier et troisième segments la fonction $f(t)$ ne change pas, et qu'à la limite on obtient une fonction discontinue. Le saut peut être évidemment interprété comme une force concentrée appliquée en t_1 suivant la normale au contour en ce point. Dans le cas général, lorsque les composantes du saut sont arbitraires, nous obtenons l'expression d'une force dirigée de façon quelconque. La condition $p = \text{const}$ sur le segment t_2, t_1 n'a été introduite que pour simplifier les calculs.

On a montré au § 4 du chapitre III que le problème de flexion des plaques se ramène à la résolution d'une équation biharmonique non homogène en général. Si, d'une façon ou d'une autre, on a trouvé une solution particulière de l'équation avec second membre, on aura à résoudre une équation homogène. Les problèmes aux limites correspondants seront résolus par la méthode des variables complexes. Nous nous bornerons à donner sans déduction, qui est pratiquement analogue aux constructions correspondantes du problème plan, les formules pour M_x, M_y, M_z, Q_x et Q_y:

$$M_y - M_x + 2iM_{xy} =$$
$$= 4D(1 - \nu)\,[\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)] + (M_y^1 - M_x^1 - 2iM_{xy}^1),$$

$$M_x + M_y = -4D(1+\nu)\left[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}\right] + (M_x^1 + M_y^1), \quad (2.26)$$
$$Q_x - iQ_y = -8D\varphi''(z) + (Q_x^1 - iQ_y^1).$$

Ici et dans la suite, l'indice « 1 » se rapporte à la solution particulière.

Dans le cas où le bord de la plaque est libre de liaisons géométriques et donc sont donnés le moment fléchissant $f_1(t)$ et l'effort tranchant $f_2(t)$, on obtient la condition aux limites

$$-\varkappa\overline{\varphi(z)} + \bar{z}\varphi'(z) + \psi(z) =$$
$$= \frac{1}{2D(1-\nu)}\left[\int_0^s (f_1^1 + if_2^1)\,ds - \int_0^s (f_1 + if_2)\,ds\right] - icz, \quad (2.27)$$

où c est une constante arbitraire. Si l'on donne la flèche $w = f_1$ et l'angle de rotation $\partial w/\partial n = f_2$, on obtient la condition

$$\overline{\varphi(z)} + \bar{z}\varphi'(z) + \psi(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - i\frac{\partial w}{\partial y}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w^1}{\partial x} - i\frac{\partial w^1}{\partial y}\right),$$
$$\frac{\partial w}{\partial x} - i\frac{\partial w}{\partial y} = \left(f_2 + i\frac{df_1}{ds}\right)e^{-i\alpha}. \quad (2.28)$$

D'autres combinaisons des conditions aux limites sont d'écriture beaucoup plus volumineuse. Quand, par exemple, on donne la flèche et le moment fléchissant, on obtient

$$\operatorname{Re}\left\{\varkappa_1^*\varphi'(t) - \left(\frac{dt}{ds}\right)^2\left[\bar{t}\varphi''(t) + \varphi'(t)\right]\right\} = f_1(t),$$
$$\operatorname{Re}\left\{\frac{dt}{ds}\left[\overline{\varphi(t)} + \bar{t}\varphi'(t) + \psi(t)\right]\right\} = f_2(t) \quad \left(\varkappa^* = \frac{2(1+\nu)}{1-\nu}\right). \quad (2.29)$$

Il est intéressant de noter que passant aux valeurs conjuguées dans les conditions (2.27) et (2.28) nous obtenons les conditions (2.22) et (2.23) du problème plan.

§ 3. Equations intégrales régulières

Les développements qui suivent se rapportent à la fois aux premier et deuxième problèmes. Soit un domaine fini simplement connexe D^+ délimité par un contour régulier L. Représentons les conditions aux limites (2.22) et (2.23) sous la forme

$$k\overline{\varphi(t)} + \bar{t}\varphi'(t) + \psi(t) = \overline{f(t)}, \quad (3.1)$$

où $k = -\varkappa$ pour le problème I^+ et $\varkappa = 1$ pour le problème II^+. Récrivons la condition (3.1) sous une autre forme :

$$\psi(t) = \overline{f(t)} - k\overline{\varphi(t)} - \bar{t}\varphi'(t). \qquad (3.2)$$

La fonction $\psi(t)$ étant analytique dans D^+, le second membre de (3.2) doit être valeur limite d'une fonction analytique dans D^+. En vertu du théorème intégral de Cauchy (1.6), chap. I, nous avons

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t) - k\overline{\varphi(t)} - \bar{t}\varphi'(t)}{t-z}\,dt = 0 \quad (z \notin D^+)$$

ou encore

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{k\overline{\varphi(t)} + \bar{t}\varphi'(t)}{t-z}\,dt = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{f(t)}\,dt}{t-z} = A(z). \qquad (3.3)$$

Nous avons obtenu pour la fonction $\varphi(t)$ une équation fonctionnelle. Transformons-la en une équation intégrale. Pour cela effectuons un passage à la limite pour $z \to L$ et $z \notin D^+$. Nous supposons par ailleurs que les fonctions $\varphi(t)$, $\varphi'(t)$ et $f(t)$ vérifient les conditions H.-L., ceci nous permettra d'utiliser, pour les intégrales du type Cauchy ayant ces fonctions pour densités, les formules de Sokhotski-Plémelj (1.14), ch. I.

Intégrons ensuite par parties; afin d'obtenir l'équation sous forme compacte, nous utiliserons les identités

$$t_0\left(-\frac{1}{2}\overline{\varphi(t_0)} + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\varphi(t)}\,d\bar{t}}{\bar{t}-\bar{t}_0}\right) = 0,$$

$$k\left(-\frac{1}{2}\varphi'(t_0) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi'(t)\,dt}{t-t_0}\right) = 0.$$

Nous aboutissons en définitive à une équation intégrale, dite *équation de Muskhelishvili* :

$$-k\varphi(t_0) - \frac{1}{2\pi i}\int_L \overline{\varphi(t)}\,d\ln\frac{\bar{t}-\bar{t}_0}{t-t_0} - \frac{1}{2\pi i}\int_L \varphi(t)\,d\frac{\bar{t}-\bar{t}_0}{t-t_0} = A(t_0). \quad (3.4)$$

Cette équation appartient à la classe des équations de Fredholm. Etablissons les conditions de résolubilité et démontrons le fait que n'importe laquelle des solutions de cette équation (la fonction $\varphi(t)$) est valeur limite d'une fonction analytique dans le domaine D^+.

Examinons le deuxième problème fondamental ($k = 1$). Soit $\varphi(t)$ une solution de l'équation (3.4). Ecrivons les intégrales du

type Cauchy

$$i\Phi(z') = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)}{t-z'}\,dt,$$

$$-i\Psi(z') = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\varphi(t)} + \bar{t}\varphi'(t) - \overline{f(t)}}{t-z'}\,dt \quad (z' \notin D^+). \tag{3.5}$$

Il s'avère alors possible d'interpréter l'équation (3.4) comme une relation faisant intervenir les fonctions $\Phi(t)$ et $\Psi(t)$ (valeurs limites de fonctions analytiques dans D^-), à savoir :

$$\overline{\Phi(t)} + \bar{t}\Phi'(t) + \Psi(t) = 0. \tag{3.5'}$$

La relation (3.5′) représente une condition aux limites homogène du deuxième problème fondamental pour le domaine D^-. Le théorème d'unicité implique que $\Phi(z') = i\alpha z' + \beta$ et $\Psi(z') = -\bar{\beta}$, où α est une constante réelle, β une constante complexe. Comme ces fonctions sont représentables par des intégrales du type Cauchy, elles doivent s'annuler à l'infini. Par conséquent, les fonctions $\Phi(z')$ et $\Psi(z')$ sont identiquement nulles. De la nullité de $\Phi(z')$ pour $z' \in D^-$ découle que la fonction $\varphi(t)$ est valeur limite d'une fonction analytique dans D^+, ce qu'il fallait démontrer.

L'équation homogène (3.4) admet une solution non triviale $\varphi_0(z) = i\alpha z + \beta$ (α et β sont comme auparavant des constantes réelle et complexe) traduisant l'état de contrainte nul. Du théorème d'unicité de la solution du problème aux limites découlera qu'il n'y a pas d'autres fonctions propres. Rappelons que le deuxième problème aux limites de l'élasticité posé pour un domaine fini est résoluble quand sont nuls le vecteur résultant et le vecteur moment des forces extérieures. La première condition conduit automatiquement à l'univocité de la fonction $f(t)$, la seconde à l'égalité :

$$\mathrm{Re}\int_L \overline{f(t)}\,dt = 0. \tag{2.23'}$$

L'établissement direct des conditions de résolubilité de l'équation de Fredholm (construction de la fonction propre de l'équation conjuguée et vérification de son orthogonalité au second membre) s'avère dans ce cas difficile. Une autre voie d'étude de l'équation (3.4) est proposée dans [135]. Introduisant dans le premier membre de l'équation le terme

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)}{t}\,dt + \frac{1}{2\pi i}\,\frac{1}{t_0}\int_L\left[\frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt + \frac{\overline{\varphi(t)}}{\bar{t}^2}\,d\bar{t}\,\right], \tag{3.6}$$

on obtient, généralement parlant, une nouvelle équation intégrale

$$-k\overline{\varphi(t_0)} - \frac{1}{2\pi i}\int_L \overline{\varphi(t)}\, d\ln\frac{\bar t - \bar t_0}{t - t_0} - \frac{1}{2\pi i}\int_L \varphi(t)\, d\frac{\bar t - \bar t_0}{t - t_0} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)}{t}\,dt + \frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{t_0}\int_L \left[\frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt + \frac{\overline{\varphi(t)}}{\bar t^2}\,d\bar t\right] = A'(t_0). \quad (3.4')$$

Introduisant la fonction $\Phi(z')$, conformément à (3.5), et la fonction $\Psi(z')$ sous la forme

$$\Psi(z') = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\varphi(t)} + \bar t\varphi'(t) - \overline{f(t)}}{t - z'}\,dt +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)}{t}\,dt + \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{z'}\int_L \left[\frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt + \frac{\overline{\varphi(t)}}{\bar t^2}\,d\bar t\right], \quad (3.7)$$

on obtient pour leurs valeurs limites (de l'extérieur) la relation (3.5). D'où il découle, en particulier, que $\Psi(z') = 0$ pour $z' \in D^-$, et donc chacun des coefficients de son développement en série suivant les puissances de $1/z'$ doit s'annuler. Le premier coefficient est de la forme

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)}{t}\,dt, \quad (3.8)$$

et le second (celui de $1/z'$) est

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L [\overline{\varphi(t)} + \bar t\varphi'(t)]\,dt - \frac{1}{2\pi i}\int_L \overline{f(t)}\,dt +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_L \left[\frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt + \frac{\overline{\varphi(t)}}{\bar t^2}\,d\bar t\right]. \quad (3.9)$$

Comme

$$\int_L \bar t\varphi'(t)\,dt = -\int_L \varphi(t)\,d\bar t,$$

nous obtenons que le premier terme de (3.9) est une grandeur réelle. Si l'on exige la réalisation de la condition (2.23'), le second terme s'avérera réel également. Le troisième terme est complexe. La nullité de la somme (3.9) implique la nullité de ce dernier terme.

Ainsi nous avons établi que sous la condition (2.23') toute solution de l'équation (3.4') annule les termes complémentaires

du type (3.6) et, par conséquent, représente la solution de l'équation initiale (3.4).

Il nous reste à démontrer que l'équation (3.4) est résoluble pour tout second membre. Admettons que l'équation homogène possède une solution non triviale que nous désignerons par φ_1. L'équation étant homogène, la condition (2.23′) est automatiquement remplie, de sorte que la fonction φ_1 doit être solution de l'équation homogène (3.4) également et donc se confondre avec $\varphi_0(t)$. Portant cette fonction dans (3.6), nous tirons de la nullité de chaque terme que les constantes α et β sont nulles.

Ainsi nous avons démontré que l'équation homogène (3.4′) n'admet pas de solutions non triviales et donc que l'équation non homogène est résoluble pour un second membre arbitraire et, en particulier, pour la condition (2.23′). Dans ce dernier cas la solution de l'équation (3.4′) sera également solution de l'équation (3.4), ce qui établit la résolubilité de cette dernière.

On étudie de même le cas du premier problème fondamental ($k = -\varkappa$). Il convient alors d'introduire dans le premier membre de l'équation (3.4) la fonctionnelle

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)}{t}\,dt. \tag{3.10}$$

La réalisation numérique de l'équation de Muskhelishvili est évidemment difficile du fait que l'équation admet pour solutions le spectre de valeurs propres. L'intégration par quadratures mécaniques conduit, en particulier, à des systèmes dégénérés. On montre dans [112] que quelle que soit la méthode d'intégration numérique, il est utile de conserver les termes du type (3.6) ou (3.10). Par suite de l'erreur des formules d'intégration, ces termes complémentaires ne seront en général pas nuls, mais introduiront une certaine erreur (minime). En revanche, la méthode permet d'éviter les difficultés de calcul apparaissant dans d'autres méthodes.

Passons maintenant à l'élaboration des équations intégrales appelées équations de Sherman-Lauricella [132]. On peut considérer d'emblée un domaine multiplement connexe D délimité par des contours $L_0, L_1, L_2, \ldots, L_m$, les contours $L_1, L_2, \ldots, L_m$ étant disjoints et L_0 (qui peut faire défaut) les englobe tous. Nous noterons D_j^+ les domaines finis délimités par les contours L_j ($j = 1, 2, \ldots, m$) et D_0^- l'extérieur du contour L_0.

Commençons l'étude par le deuxième problème fondamental, supposant que les vecteurs résultants des efforts s'exerçant sur chacun des contours L_j sont nuls *). Ecrivons les conditions aux

*) Dans le cas contraire il convient d'effectuer une transformation adéquate des conditions aux limites.

limites sous la forme

$$\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = f_j(t) + c_j \quad (t \in L_j,\ j = 0, 1, 2, \ldots, m), \tag{3.11}$$

où f_j sont des fonctions données et c_j des constantes qui se déterminent au cours de la résolution du problème. L'une de ces constantes est choisie arbitraire, aussi posons-nous $c_0 = 0$.

Nous rechercherons les fonctions inconnues $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ sous la forme des intégrales ($L = L_0 \cup L_1 \cup L_2 \cup \ldots \cup L_m$)

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega(t)}{t - z}\, dt, \tag{3.12}$$

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\omega(t)}}{t - z}\, dt + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega(t)}{t - z}\, dt - \\ - \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\bar{t}\omega(t)}{(t - z)^2}\, dt + \sum_{j=1}^{m} \frac{b_j}{z - z_j}. \tag{3.13}$$

Ici $\omega(t)$ est une fonction devant être déterminée, z_k des points choisis arbitrairement dans les domaines D_j^+ $(j = 1, 2, \ldots, m)$, b_j des constantes réelles déterminées de la manière suivante :

$$b_j = i\int_{L_j} [\omega(t)\, d\bar{t} - \overline{\omega(t)}\, dt]. \tag{3.14}$$

Nous admettrons que la fonction $\omega(t)$ vérifie la condition H.-L. Réalisons maintenant dans les expressions de $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ le passage à la limite en faisant tendre t vers les points de la frontière, de l'extérieur pour les contours L_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$ et de l'intérieur pour le contour L_0. Une procédure analogue sera opérée avec l'expression de la fonction $\varphi'(z)$ qui s'obtient de (3.12) par dérivation successive et intégration par parties. Portant les expressions obtenues dans les conditions aux limites (3.11) nous aboutissons à une équation intégrale de Fredholm

$$\omega(t_0) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \omega(t)\, d \ln \frac{t - t_0}{\bar{t} - \bar{t}_0} - \frac{1}{2\pi i}\int_L \overline{\omega(t)}\, d\, \frac{t - t_0}{\bar{t} - \bar{t}_0} + \\ + \sum_{j=0}^{m} \frac{\bar{b}_j}{\bar{t}_0 - \bar{z}_j} = f_j(t) + c_j \quad (t \in L_j). \tag{3.15}$$

Cette équation s'appelle *équation de Sherman-Lauricella*. Dans le premier membre de (3.15) nous avons introduit complémen-

tairement le terme $\bar{b}_0/(\bar{t}_0 - \bar{z}_0)$, où le point z_0 ($z_0 = 0$) est conservé pour l'unicité de l'écriture et

$$b_0 = \int_L \left[\frac{\omega(t)}{t^2}\, dt + \frac{\overline{\omega(t)}}{\bar{t}^2}\, d\bar{t} \right]. \tag{3.16}$$

Posons ensuite

$$b_j = -\int_{L_j} \omega(t)\, ds. \tag{3.17}$$

La relation (3.15) devient alors une équation intégrale à termes entièrement définis. Montrons que toute solution de cette équation annule le coefficient b_0 si est nul le moment résultant des forces appliquées au corps. En l'absence du contour L_0 cette condition peut ne pas être remplie.

L'équation (3.15) est équivalente au problème aux limites suivant :

$$\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} + \frac{b_0}{\bar{t}} - c_j = f(t) \quad (t \in L_j). \tag{3.18}$$

Multipliant ses deux membres par $d\bar{t}$ et intégrant nous obtenons

$$\int_L [\varphi(t)\, d\bar{t} - \overline{\varphi(t)}\, dt] - 2\pi i \bar{b}_0 = \int_L f(t)\, d\bar{t}.$$

Tous les termes de cette équation sauf $2\pi i \bar{b}_0$ sont des grandeurs imaginaires, aussi $b_0 = 0$.

Démontrons que l'équation (3.15) (compte tenu de (3.16)) est toujours résoluble. Supposons le contraire. L'équation homogène admet alors une solution non triviale qu'on désigne par $\omega_0(t)$. Soient $\varphi_0(z)$, $\psi_0(z)$ et c_j^0 les fonctions et les constantes déterminées par cette solution. Dans ce cas

$$\varphi_0(t) + t\overline{\varphi_0'(t)} + \overline{\psi_0(t)} - c_j^0 = 0 \quad (t \in L_j). \tag{3.19}$$

En vertu du théorème d'unicité

$$\varphi_0(z) = i\alpha z + \beta, \quad \psi_0(z) = -\bar{\beta}, \quad c_j^0 = 0. \tag{3.20}$$

Revenant à (3.12) et (3.13) nous obtenons

$$i\alpha z + \beta = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\omega_0(t)}{t - z}\, dt,$$

$$-\bar{\beta} = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\overline{\omega_0(t)}\, dt}{t - z} - \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\bar{t}\omega_0'(t)\, dt}{t - z} + \sum_{j=1}^{m} \frac{b_j}{z - z_j}. \tag{3.21}$$

Comme les termes de (3.21) qui ne sont pas des intégrales sont des fonctions analytiques dans D, ils peuvent être représentés sous la forme d'intégrales de Cauchy de leurs valeurs limites, de sorte que si l'on introduit sur les contours L_j les fonctions

$$i\varphi^*(t) = \omega_0(t) - i\alpha t - \beta, \tag{3.22}$$

$$i\psi^*(t) = \overline{\omega_0(t)} - \bar{t}\omega_0'(t) + \sum_{j=1}^{m} \frac{b_j}{t - z_j}, \tag{3.23}$$

les égalités (3.21) se laissent ramener à la forme

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi^*(t)}{t - z}\,dt = 0, \quad \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\psi^*(t)}{t - z}\,dt = 0 \quad (z \in D). \tag{3.24}$$

Il en découle que les fonctions $\varphi^*(t)$ et $\psi^*(t)$ sont valeurs limites de fonctions analytiques dans les domaines D_j^+ et D_0^-, avec par ailleurs $\varphi^*(\infty) = 0$ et $\psi^*(\infty) = 0$.

On a établi plus haut que le coefficient $b_0 = 0$ quand l'équilibre est assuré. Dans le cas considéré cette condition est évidemment satisfaite, donc nous avons $b_0^0 = 0$. Portant dans (3.16) $\omega_0(t)$ tirée de (3.22), nous obtenons $\alpha = 0$. Eliminant ensuite $\omega_0(t)$ entre (3.22) et (3.23), nous obtenons

$$\varphi^*(t) + \bar{t}\varphi^{*\prime}(t) + \psi^*(t) = i\sum_{j=1}^{m} \frac{b_j^0}{t - \bar{z}_j} - 2i\bar{\beta}. \tag{3.25}$$

Multiplions les deux membres de (3.25) par dt et intégrons suivant chacun des contours L_j. Nous sommes alors conduits aux égalités

$$\int_{L_j} [\overline{\varphi^*(t)}\,dt - \varphi^*(t)\,d\bar{t}] = -2\pi b_j^0, \tag{3.26}$$

qui impliquent $b_j^0 = 0$. Ceci étant, les fonctions $\varphi^*(z)$ et $\psi^*(z)$ de (3.25) sont solutions du deuxième problème fondamental pour chacun des domaines D_j^+ $(j = 0, 1, \ldots, m)$ pour des contraintes nulles sur la frontière. Des conditions à l'infini par ailleurs ressort que $\varphi^*(\infty) = \psi^*(\infty) = 0$, ce qui conduit à l'identité $\varphi^*(z) = \psi^*(z) = $ $= 0$ et par conséquent à $\beta = 0$. Ainsi

$$\varphi^*(z) = i\alpha_j(z) + \beta_j, \quad \psi^*(z) = -\beta_j \quad (z \in D_j^+),$$

d'où en vertu des formules (3.22) et (3.23) nous obtenons

$$\omega_0(t) = -\alpha_j t + i\beta_j \quad (t \in L_j, \quad j = 1, 2, \ldots, m),$$

$$\omega_0(t) = 0 \quad (t \in L_0).$$

Des conditions $b_j^0 = c_k^0 = 0$ (cf. (3.14) et (3.17)) nous déduisons $\alpha_j = \beta_j = 0$. Aussi $\omega_0(t) \equiv 0$. Ce résultat établit la résolubilité

de l'équation (3.15) (compte tenu de (3.17)) lorsque le vecteur-moment résultant des forces extérieures est nul.

Envisageons succinctement deux autres équations intégrales. Dans [124] la condition aux limites se choisit directement en contraintes. Représentons la condition (2.8″) sous une forme légèrement modifiée :

$$\Psi(t) = [\bar{f}(t) - \Phi(t) - \overline{\Phi(t)}]\frac{d\bar{t}}{dt} - \bar{t}\Phi'(t). \qquad (3.27)$$

Des procédés analogues à ceux employés pour la construction de l'équation de Muskhelishvili nous conduisent à une équation intégrale de la forme

$$\overline{\Phi(t_0)} + \frac{1}{2\pi i}\int_L \left(\frac{1}{\bar{t} - \bar{t}_0} - \frac{dt_0}{d\bar{t}_0}\frac{1}{t - t_0}\right)\overline{\Phi(t)}\, d\bar{t} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_L \left(\frac{1}{t - t_0} - \frac{dt_0}{d\bar{t}_0}\frac{\bar{t} - \bar{t}_0}{(t - t_0)^2}\right)\Phi(t)\, dt = \frac{1}{2}f(t) - \frac{1}{2\pi i}\frac{dt_0}{d\bar{t}_0}\int_L \frac{f(t)\, d\bar{t}}{t - t_0}. \qquad (3.28)$$

Par analogie avec la déduction de l'équation de Sherman-Lauricella, on peut représenter les fonctions $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ sous la forme d'intégrales d'une fonction auxiliaire $\omega(t)$:

$$\varphi(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_L \omega(t) \ln(t - z)\, ds,$$

$$\psi(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_L \overline{\omega(t)} \ln(t - z)\, ds - \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\bar{t}}{t - z}\,\omega(t)\, ds. \qquad (3.29)$$

Pour plus de simplicité on se borne ici au cas d'un domaine simplement connexe. Le passage à la limite et toute une suite de transformations nous conduisent à une équation intégrale de la forme [44]

$$\omega(t_0) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \omega(t)\frac{\partial}{\partial s_0}\left[\ln\frac{\bar{t} - \bar{t}_0}{t - t_0}\right] ds +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_L \overline{\omega(t)}\;\frac{\partial}{\partial s_0}\left[\frac{t - t_0}{\bar{t} - \bar{t}_0}\right] ds = i(\sigma_{x\nu} + i\sigma_{y\nu}). \qquad (3.30)$$

Naturellement on peut appliquer à la résolution des équations intégrales indiquées ci-dessus les méthodes numériques exposées

au § 2, ch. I, avec des modifications évidentes qui s'imposent lorsque les solutions des équations sont leurs valeurs propres. On trouvera dans [112] une procédure de résolution de l'équation (3.4). Pour obtenir des résultats stables il s'est avéré nécessaire de passer à l'équation (3.4′) dont les solutions ne sont plus les valeurs propres. Dans [112] est considéré en outre un cas particulier où le domaine est un polygone rectiligne; ce cas est justiciable d'un procédé de calcul spécial qui consiste en ce que la fonction $\omega(t)$ se développe en une série de puissances sur chaque côté du polygone et les intégrales se calculent explicitement.

Dans le cas général de contours curvilignes il y a lieu, si possible, d'effectuer l'intégration sur chaque arc de contour d'après les formules exactes, tout en admettant la densité constante sur chaque segment. C'est ainsi que dans [165] a été construite la solution de l'équation (3.15). Une question relative à la précision de la solution du problème aux limites est également traitée dans cet article. Le fait est que même lorsque l'équation intégrale est résolue avec une exactitude suffisante, les valeurs des contraintes risquent d'être entachées de grandes erreurs provenant de la différentiation des intégrales singulières. Pour rester dans les limites de précision admissibles, on propose de représenter la fonction $\omega(t)$, après avoir résolu l'équation intégrale, par des splines cubiques.

Dans [161] on propose d'utiliser pour la résolution de l'équation (3.15) un système de fonctions, fondamental dans W_2^3, et de déterminer les coefficients par la méthode des moindres carrés.

§ 4. Solutions en séries

Exposons la méthode de résolution de problèmes de l'élasticité en séries, directement réalisable pour des domaines délimités par un cercle ou deux cercles concentriques. Son extension à des configurations plus générales nécessite l'emploi de l'appareil des applications conformes.

Considérons le deuxième problème fondamental pour un disque de rayon R. Il peut être ramené à un problème aux limites de la forme

$$\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} =$$

$$= i\int_0^s (\sigma_{x\nu} + i\sigma_{y\nu})\, ds = iR\int_0^\theta (\sigma_{x\nu} + i\sigma_{y\nu})\, d\theta = f_1 + if_2. \quad (4.1)$$

Dans ce cas doivent s'annuler le vecteur résultant et le vecteur-moment des forces extérieures :

$$\int_0^{2\pi} (\sigma_{xv} + i\sigma_{yv})\, d\theta = 0, \tag{4.2}$$

$$\int_0^{2\pi} (f_1\, dx + f_2\, dy) = \int_0^{2\pi} (-f_1 \sin\theta + f_2 \cos\theta)\, d\theta = 0. \tag{4.3}$$

Nous supposerons les fonctions σ_{xv}, σ_{yv} des fonctions continues de l'angle polaire θ, ce qui permettra de représenter le second membre de (4.1) sous forme d'une série

$$f_1 + if_2 = \sum_{-\infty}^{\infty} A_n e^{in\theta}. \tag{4.4}$$

Comme les fonctions $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ sont analytiques à l'intérieur du disque, elles doivent aussi admettre des développements en série

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k, \quad \psi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a'_k z^k.$$

Nous avons ensuite

$$\overline{\varphi'(z)} = \sum_{k=1}^{\infty} k\bar{a}_k \bar{z}^{k-1}, \quad \overline{\psi(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{a}'_k \bar{z}^k.$$

Admettant que les séries convergent sur le contour également, on obtient

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k t^k + t \sum_{k=1}^{\infty} k\bar{a}_k \left(\frac{R^2}{t}\right)^{k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} \bar{a}'_k \left(\frac{R^2}{t}\right)^k = \sum_{-\infty}^{\infty} A_k e^{ik\theta}. \tag{4.5}$$

Le second membre de (4.5) étant une fonction de θ, passons à cette variable dans le premier membre de l'égalité :

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k R^k e^{ik\theta} + a_1 R e^{i\theta} +$$
$$+ \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)\, \bar{a}_{k+2} R^{k+2} e^{-ik\theta} + \sum_{k=0}^{\infty} \bar{a}'_k R^k e^{-ik\theta} = \sum_{-\infty}^{\infty} A_k e^{ik\theta}.$$

Comparant les coefficients des $e^{i\theta}$, $e^{ik\theta}$ $(k > 1)$ et $e^{-ik\theta}$ $(k \geqslant 0)$ nous déduisons

$$a_1 + \bar{a}_1 = \frac{A_1}{R}, \tag{4.6}$$

$$a_k R^k = A_k \quad (k > 1). \tag{4.7}$$

$$(k+2)\,\bar{a}_{k+2} R^{k+2} + R^k \bar{a}'_k = A_{-k} \quad (k \geqslant 0). \tag{4.8}$$

(4.6) implique $\operatorname{Im} A_1 = 0$. Voyons quelle est la signification de cette restriction. Nous avons

$$2\pi A_1 = \int_0^{2\pi} (f_1 + if_2) e^{-i\theta} d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} (f_1 \cos\theta + f_2 \sin\varphi)\, d\theta + i \int_0^{2\pi} (f_2 \cos\theta - f_1 \sin\theta)\, d\theta.$$

Revenant à (4.4) nous obtenons que la partie imaginaire est égale à la valeur du moment des forces extérieures qui est par hypothèse nul. (4.6) est donc toujours résoluble. Il est vrai que la valeur de $\operatorname{Im} a_1$ ne se détermine pas, mais peut être choisie arbitraire et ceci n'a aucune influence sur l'état de contrainte. Puis on tire de (4.7) les coefficients a_k et ensuite de (4.8) les a'_k.

Il reste à vérifier si les séries ainsi obtenues sont réellement convergentes et conduisent à la solution du problème aux limites. La démonstration (vu sa simplicité) sera faite pour une restriction plus forte que celle utilisée pour la construction de la solution. Nous exigerons que les fonctions $\sigma_{x\nu}$ et $\sigma_{y\nu}$ admettent des dérivées premières vérifiant les conditions de Dirichlet (cf. § 1, chapitre I). Dans ce cas les séries

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k, \quad \varphi'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1}, \quad \psi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a'_k z^k$$

s'avèrent absolument convergentes. Considérons sur le cercle $|z| = R$ les séries

$$\sum |a_k| R^k, \quad \sum k |a_k| R^{k-1}, \quad \sum |a'_k| R^k.$$

Vu les restrictions imposées aux fonctions $\sigma_{x\nu}$ et $\sigma_{y\nu}$, nous avons

$$|A_k, A_{-k}| < \frac{C}{k^3} \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Compte tenu de (4.6), (4.7) et (4.8) et utilisant les majorations précédentes, nous obtenons les majorations

$$|a_k|R^k < \frac{C}{k^3}, \quad k|a_k|R^{k-1} < \frac{C'}{k^2}, \quad |a'_k|R^k < \frac{C''}{k^2}$$

(C, C', C'' étant des constantes) qui établissent la convergence des séries.

De façon analogue se construit la solution pour le premier problème fondamental, avec la seule différence qu'une relation analogue à (4.6) aura toujours lieu.

Dans certains cas très importants l'appareil de la théorie des séries permet d'obtenir immédiatement la solution sous forme explicite. Considérons à titre d'exemple un plan comportant une ouverture circulaire de rayon R et posons $\sigma_{x\nu} = P_x/2\pi R$ et $\sigma_{y\nu} = P_y/2\pi R$. Nous chercherons la solution directement pour des conditions aux limites en contraintes $N_\nu - iT_\nu$ (sans passer aux fonctions f_1 et f_2), déterminant les fonctions $\Phi(z)$ et $\Psi(z)$ et non $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ (la marche à suivre est toujours la même). Il est évident que P_x et P_y sont les projections du vecteur résultant sur les axes x et y. Exprimant les conditions aux limites par N_ν et T_ν qui sont les projections du vecteur résultant sur la normale et la tangente au contour, nous obtenons

$$N_\nu = -\frac{1}{2\pi R}(P_x \cos\theta + P_y \sin\theta),$$

$$T_\nu = -\frac{1}{2\pi R}(-P_x \sin\theta + P_y \cos\theta)$$

ou bien

$$N_\nu - iT_\nu = -\frac{1}{2\pi R}(P_x - iP_y)e^{i\theta}.$$

Portant dans les conditions aux limites les développements des fonctions $\Phi(z)$ et $\Psi(z)$ en séries suivant les puissances négatives de z, on voit que le nombre de termes des séries est fini. Rapportons uniquement le résultat définitif

$$\Phi(z) = -\frac{P_x + iP_y}{2\pi(1+\varkappa)}\frac{1}{z},$$
$$\Psi(z) = \frac{\varkappa(P_x - iP_y)}{2\pi(1+\varkappa)}\frac{1}{z} - \frac{P_x + iP_y}{\pi(1+\varkappa)}\frac{R^2}{z^3}. \tag{4.9}$$

Supposant que $R \to 0$ et que la résultante (P_x, P_y) reste inchangée nous obtenons

$$\Phi(x) = -\frac{P_x + iP_y}{2\pi(1+\varkappa)}\frac{1}{z}, \quad \Psi(z) = \frac{\varkappa(P_x - iP_y)}{2\pi(1+\varkappa)}\frac{1}{z}. \tag{4.10}$$

La solution (4.10) est celle d'un problème posé pour une force concentrée (P_x, P_y) appliquée à l'origine des coordonnées. Rapportons également les expressions correspondantes des fonctions $\varphi(z)$ et $\psi(z)$:

$$\varphi(z) = -\frac{P_x + iP_y}{2\pi(1+\varkappa)} \ln z, \quad \psi(z) = \frac{\varkappa(P_x - iP_y)}{2\pi(1+\varkappa)} \ln z. \quad (4.11)$$

Si la force concentrée est appliquée en un point autre que l'origine des coordonnées, disons z_0, on obtient appliquant les formules de transformation de coordonnées usuelles :

$$\begin{gathered} \varphi(z) = -\frac{P_x + iP_y}{2\pi(1+\varkappa)} \ln (z - z_0), \\ \psi(z) = \frac{\varkappa(P_x - iP_y)}{2\pi(1+\varkappa)} \ln (z - z_0) + \frac{\bar{z}_0(P_x + iP_y)}{2\pi(1+\varkappa)} \frac{1}{z - z_0}. \end{gathered} \quad (4.12)$$

Considérons le cas d'une couronne délimitée par des cercles concentriques de rayons R_1 et R_2. La condition aux limites sera représentée sous la forme (2.8). On cherchera les potentiels $\Phi(z)$ et $\Psi(z)$. Nous avons

$$\Phi(t) + \overline{\Phi(t)} - e^{2i\theta}[\Phi'(t) + \Psi(t)] = \begin{cases} \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} A'_k e^{ik\theta}, & t \in L_1, \\ \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} A''_k e^{ik\theta}, & t \in L_2. \end{cases} \quad (4.13)$$

Utilisant (2.14) nous obtenons les développements en série

$$\Phi(z) = A \ln z + \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k, \quad \Psi(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a'_k z^k, \quad (4.14)$$

d'autre part, la condition d'univocité des déplacements (2.17) implique

$$A = 0, \quad \varkappa a_{-1} + \bar{a}'_{-1} = 0. \quad (4.15)$$

Portant les développements (4.14) dans les conditions (4.13) et égalant les coefficients des mêmes puissances de θ nous obtenons le système d'équations

$$\begin{gathered} 2A \ln R_1 - A + 2a_0 - a'_{-2} R_1^{-2} = A'_0, \\ 2A \ln R_2 - A + 2a_0 - a'_{-2} R_2^{-2} = A''_0, \\ (1-k) a_k R_1^k + \bar{a}_{-k} R_1^{-k} - a'_{k-2} R_1^{k-2} = A'_k, \quad (k = \pm 1, \pm 2, \ldots), \\ (1-k) a_k R_2^k + \bar{a}_{-k} R_2^{-k} - a'_{k-2} R_2^{k-2} = A''_k. \end{gathered} \quad (4.16)$$

La condition de résolubilité des deux premières équations est l'égalité

$$\operatorname{Im}(A_0''R_2^2 - A_0'R_1^2) = 0,$$

qui se confond avec la condition d'égalité à zéro du moment résultant des efforts extérieurs.

Considérant deux à deux les autres équations du système (pour un k fixe) et éliminant le coefficient a'_{k-2}, nous obtenons l'équation

$$(1 - k)(R_2^2-R_1^2)\, a_k + (R_2^{-2k+2} - R_1^{-2k+2})\, \bar{a}_{-k} = A_k''R_2^{-k+2} - A_k'R_1^{-k+2}. \tag{4.17}$$

La seconde équation s'obtient de (4.17) par passage aux valeurs conjuguées et remplacement de k par $-k$. On obtient donc pour chaque k ($k > 0$) un système de deux équations aux inconnues a_k et $\bar{a}_{-k}$. Le déterminant de ce système s'annule pour $k = 0, 1$ et -1. Le cas de $k = 0$ ne nous intéresse plus, tandis que pour $k = 1$ nous obtenons le système

$$A_1''R_2 - A_1'R_1=0, \quad (R_2^4 - R_1^4)\, a_1+2(R_2^2-R_1^2)\, \bar{a}_{-1}=\bar{A}''_{-1}R_2^3-\bar{A}'_{-1}R_1^3.$$

La première équation est la condition de nullité du vecteur résultant des efforts extérieurs, la seconde permet d'exprimer l'un des coefficients par l'autre (on n'a pas encore utilisé la condition d'univocité des déplacements). Les autres coefficients a_k et $\bar{a}_{-k}$ se calculent sous forme explicite, de même par ailleurs que les a'_k.

Compte tenu de l'univocité des déplacements, les coefficients a_1, a_{-1} et a'_{-1} s'écrivent :

$$a_1 = \frac{\bar{A}''_{-1}R_2^3 - \bar{A}'_{-1}R_1^3}{R_2^4 - R_1^4} - \frac{2A_1'R_1}{(1+\varkappa)(R_1^2+R_2^2)}, \quad a_{-1} = \frac{\bar{A}_1'R_1}{1+\varkappa}, \quad a'_{-1} = \frac{\varkappa A_1'R_1}{1+\varkappa}. \tag{4.18}$$

Illustrons l'exposé précédent en considérant le problème de Lamé pour une conduite à l'intérieur de laquelle règne une pression uniforme d'intensité $-p_1$ et soumise extérieurement à une pression d'intensité $-p_2$. On a alors $A_0' = -p_1$, $A_0'' = -p_2$, les autres coefficients sont nuls. Par conséquent, il ne restera dans les expressions des fonctions $\Phi(z)$ et $\Psi(z)$ qu'un terme :

$$\Phi(z) = -\frac{p^2R_2^2 - p_1R_1^2}{2(R_2^2 - R_1^2)},$$

$$\Psi(z) = -\frac{(p_2-p_1)\, R_1^2R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}\,\frac{1}{z^2}.$$

L'appareil exposé permet également de résoudre les problèmes pour des domaines de configuration plus complexe. Soient, par

exemple, dans le plan deux ouvertures circulaires : L_1 de centre a_1 et L_2 de centre a_2. On cherchera les fonctions inconnues $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ sous la forme de sommes $\varphi_1(z) + \varphi_2(z)$ et $\psi_1(z) + \psi_2(z)$. Les fonctions $\varphi_1(z)$ et $\psi_1(z)$ d'une part et $\varphi_2(z)$ et $\psi_2(z)$ d'autre part peuvent être développées suivant les puissances de $\frac{1}{(z-a_1)}$ et $\frac{1}{(z-a_2)}$ respectivement. On redéveloppera ensuite les fonctions $\varphi_2(z)$ et $\psi_2(z)$ suivant les puissances de $(z - a_1)$. On obtient en définitive les expressions des conditions sur le contour L_1 dans lesquelles figurent tous les coefficients. Pour le contour L_2 les constructions sont analogues.

Les systèmes d'équations algébriques peuvent être obtenus par différentes méthodes. Outre le développement en série de Fourier, on peut recommander la méthode du petit paramètre (le petit paramètre est, par exemple, le rapport du rayon des ouvertures à la distance entre leurs centres si cette distance est suffisamment grande devant le rayon), la méthode de Boubnov-Galerkin [53]. L'appareil des développements en séries est applicable également dans le cas où les domaines sont délimités par des contours de configuration complexe. On aura alors recours à une application conforme.

§ 5. Application des intégrales du type Cauchy

Une méthode efficace de résolution du problème plan de l'élasticité et du problème de flexion des plaques est fondée sur l'appareil des intégrales du type Cauchy [95] qui permet de résoudre les problèmes indiqués, fondamentaux, sous forme explicite lorsque l'application des domaines de départ sur des domaines canoniques, tels que le cercle ou le demi-plan, est une fonction rationnelle ou homographique.

Considérons, par exemple, le problème intérieur pour un domaine D^+ délimité par un contour L. Pour faciliter l'analyse du premier et du deuxième problème, récrivons (2.22) et (2.23) sous une forme unifiée

$$k\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = f(t), \tag{5.1}$$

où $k = -\varkappa$ pour le problème I et $k = 1$ pour le problème II. Dans la suite on considérera plus souvent le deuxième problème (étant donné son importance pour les applications) avec des conditions complémentaires assurant l'auto-équilibre des forces extérieures.

Choisissant l'application $z = \omega(\zeta)$ du cercle unité dans le plan auxiliaire ζ sur le domaine D^+ sous la forme (pour plus de simplicité le terme nul n'est pas écrit)

$$\omega(\zeta) = c_1\zeta + c_2\zeta^2 + \ldots + c_n\zeta^n. \tag{5.2}$$

Passons aux nouvelles fonctions $\varphi[\omega(\zeta)]$ et $\psi[\omega(\zeta)]$ que nous noterons $\varphi(\zeta)$ et $\psi(\zeta)$. La condition aux limites (5.1) s'écrit alors sous la forme

$$k\varphi(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\,\overline{\varphi'(\sigma)} + \overline{\psi(\sigma)} = f(\sigma). \tag{5.3}$$

Conformément à [95], appliquons aux deux membres de l'équation l'opérateur de Cauchy pour $|\zeta| < 1$. La fonction $\varphi(\zeta)$ étant analytique dans $|\zeta| < 1$, nous obtenons d'après le théorème intégral de Cauchy que l'intégrale du premier terme reconstitue la fonction $\varphi(\zeta)$.

Considérons le troisième terme. La fonction $\overline{\psi(\sigma)}$ est la conjuguée de $\psi(\sigma)$ qui est valeur limite d'une fonction analytique dans D^+. Si nous montrons que $\overline{\psi(\sigma)}$ est valeur limite d'une fonction analytique dans D^-, nous établirons d'emblée la nullité de l'intégrale correspondante.

Pour le démontrer, représentons la fonction $\psi(\zeta)$ sous la forme d'une série

$$\psi(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \zeta^n. \tag{5.4}$$

Considérons la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \bar{a}_n \frac{1}{\zeta^n} = \bar{\psi}\left(\frac{1}{\zeta}\right),$$

qui représente une fonction analytique dans D^-. La valeur limite de cette série sur le cercle $|\zeta| = 1$ se confond avec $\overline{\varphi(\sigma)}$, ce qu'il fallait démontrer.

Passons maintenant à la considération du deuxième terme. Le rapport $\omega(\sigma)/\overline{\omega'(\sigma)}$ est la valeur limite de la fonction $\omega(\zeta)/\bar{\omega}'(1/\zeta)$ analytique dans le domaine $|\zeta| > 1$, admettant à l'infini un pôle d'ordre n et donc développable en série :

$$\frac{\omega(\zeta)}{\bar{\omega}'\left(\frac{1}{\zeta}\right)} = b_n\zeta^n + b_{n-1}\zeta^{n-1} + \ldots + b_1\zeta + b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b_{-k}\frac{1}{\zeta^k}. \tag{5.5}$$

Les coefficients b_n se déterminent de façon élémentaire (on montrera dans la suite que les $n+1$ premiers coefficients suffisent).

Comme précédemment, on peut montrer que la fonction $\overline{\varphi'(\sigma)}$ est la valeur limite de la fonction $\bar{\varphi}'(1/\zeta)$ analytique dans le domaine $|\zeta| > 1$. Par conséquent, le second terme de (5.3) est la valeur limite du produit

$$\frac{\omega(\zeta)}{\bar{\omega}'\left(\frac{1}{\zeta}\right)}\,\bar{\varphi}'\left(\frac{1}{\zeta}\right).$$

Utilisant le développement en série de la fonction $\varphi(\zeta)$

$$\varphi(\zeta) = a_0 + a_1\zeta + \dots + a_n\zeta^n + a_{n+1}\zeta^{n+1} + \dots \quad (|\zeta| < 1), \tag{5.6}$$

nous obtenons la partie principale du produit considéré sous la forme :

$$\frac{\omega(\zeta)}{\overline{\omega'}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}\,\overline{\varphi'}\left(\frac{1}{\zeta}\right) = K_n\zeta^n + K_{n-1}\zeta^{n-1} + \dots + K_1\zeta + K_0, \tag{5.7}$$

où les coefficients K_j sont déterminés de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
K_n &= \bar{a}_1 b_n,\\
K_{n-1} &= \bar{a}_1 b_{n-1} + 2\bar{a}_2 b_n,\\
K_{n-2} &= \bar{a}_1 b_{n-2} + 2\bar{a}_2 b_{n-1} + 3\bar{a}_3 b_n,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
K_1 &= \bar{a}_1 b_1 + 2\bar{a}_2 b_2 + \dots + (n-1)\,\bar{a}_{n-1} + n\bar{a}_n b_n,\\
K_0 &= \bar{a}_1 b_0 + 2\bar{a}_2 b_1 + \dots + n\bar{a}_n b_{n-1} + (n+1)\,\bar{a}_{n+1} b_n.
\end{aligned} \tag{5.8}$$

Appliquant maintenant l'opérateur de Cauchy au second terme de (5.3) nous parvenons à une somme finie (le terme K_0 n'est pas conservé comme n'ayant pas d'influence sur l'état de contrainte)

$$K_n\zeta^n + K_{n-1}\zeta^{n-1} + \dots + K_2\zeta^2 + K_1\zeta =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\sigma|=1} \frac{\omega(\sigma)\overline{\varphi'(\sigma)}\,d\sigma}{\overline{\omega'(\sigma)}(\sigma-\zeta)}, \tag{5.9}$$

puisque (d'après (5.7)) les autres termes (ceux qui ne figurent pas dans la partie principale) représentent la valeur limite d'une fonction analytique dans $|\zeta| > 1$. Bien entendu, les valeurs des constantes $K_n, K_{n-1}, \dots, K_2, K_1$ sont pour le moment inconnues.

Réunissant les résultats précédents, nous aboutissons à l'égalité

$$k\varphi(\zeta) + K_n\zeta^n + K_{n-1}\zeta^{n-1} + \dots + K_2\zeta^2 + K_1\zeta =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\sigma|=1} \frac{f\,d\sigma}{\sigma-\zeta} = A(\zeta). \tag{5.10}$$

Utilisons cette égalité pour déterminer les coefficients K_j exprimés à l'aide des coefficients a_j conformément à (5.8). Développons le second membre de (5.10) en série suivant les puissances de ζ

(pour $|\zeta| < 1$). Pour cela représentons la fonction $A(\zeta)$ sous la forme suivante :

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\sigma|=1}\frac{f(\sigma)\,d\sigma}{\sigma-\zeta}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\sigma|=1}\frac{f(\sigma)\,d\sigma}{\sigma\left(1-\dfrac{\zeta}{\sigma}\right)}=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\sigma|=1}\frac{f(\sigma)}{\sigma}\left[\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{\zeta}{\sigma}\right)^{i}\right]d\sigma=\sum_{i=0}^{\infty}A_i\zeta^i.$$

Les coefficients A_i sont évidemment

$$A_i=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\sigma|=1}f(\sigma)\sigma^{-i-1}d\sigma \quad (i=1,2,\ldots,n). \tag{5.11}$$

Egalant les coefficients des mêmes puissances de ζ dans les développements en série des deux membres de (5.10) nous obtenons le système d'équations

$$\begin{aligned} a_n+\bar{a}_1b_n&=A_n,\\ a_{n-1}+\bar{a}_1b_{n-1}+2\bar{a}_2b_n&=A_{n-1},\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_2+\bar{a}_1b_2+2\bar{a}_2b_3+\ldots+(n-1)\bar{a}_{n-1}b_n&=A_2,\\ a_1+\bar{a}_1b_1+2\bar{a}_2b_2+\ldots+(n-1)\bar{a}_{n-1}b_{n-1}+na_nb_n&=A_1. \end{aligned} \tag{5.12}$$

Ce système est en général dégénéré puisqu'il doit être irrésoluble pour un second membre arbitraire. La condition de sa résolubilité est la nullité du moment résultant des forces extérieures *), condition réalisée par hypothèse. D'autre part, on se souvient que l'état de contrainte ne dépend pas de Im a_1 de sorte que l'on peut choisir cette quantité arbitraire. Tout ceci garantit l'unicité du système.

Ayant trouvé les coefficients a_j, nous déterminons les coefficients K_j. L'égalité (5.10) peut être interprétée désormais, après le transfert de tous les termes en K_j dans le second membre, comme solution exacte pour la fonction $\varphi(\zeta)$.

Reste à déterminer la fonction $\psi(\zeta)$: on prend de la condition aux limites (5.3) la conjuguée et on applique l'opérateur de Cauchy. Des raisonnements analogues à ceux employés pour la déduction de la fonction $\varphi(\zeta)$ nous conduisent à la représentation **)

$$\psi(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\sigma|=1}\frac{\bar{f}\,d\sigma}{\sigma-\zeta}+\bar{K}_0+\bar{K}_{-1}\zeta+\bar{K}_{-2}\zeta^2+\ldots \tag{5.13}$$

*) Ceci sera encore une fois illustré sur l'exemple du problème élémentaire où le domaine D^+ est un disque.

**) Les coefficients K_j $(j < 0)$ sont introduits de la même façon que dans (5.7).

La série figurant dans (5.13) peut être sommée. En effet, le développement en série du produit $\frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\omega'(\zeta)}\varphi'(\zeta)$ nous donne

$$\bar{K}_0+\bar{K}_{-1}\zeta+\bar{K}_{-2}\zeta^2+\ldots=-\frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\omega'(\zeta)}\varphi'(\zeta)+\frac{\bar{K}_1}{\zeta}+\ldots+\frac{\bar{K}_n}{\zeta^n}-\bar{a}_0.$$

La fonction $\psi(\zeta)$ s'écrit alors

$$\psi(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\sigma|=1}\frac{\bar{f}\,d\sigma}{\sigma-\zeta}-\frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\omega'(\zeta)}\varphi'(\zeta)+\frac{\bar{K}_1}{\zeta}+\ldots+\frac{\bar{K}_n}{\zeta^n}-\bar{a}_0. \quad (5.14)$$

La méthode exposée se transpose pratiquement sans modifications au cas des problèmes extérieurs où l'application est de la forme

$$\omega(\zeta)=\frac{c_{-1}}{\zeta}+c_1\zeta+\ldots+c_n\zeta^n \quad (5.15)$$

(les autres puissances négatives sont éliminées par la condition de conformité de l'application à l'infini). En vue d'appliquer l'opérateur de Cauchy on choisira naturellement le point ζ dans le domaine $|\zeta|>1$ (les exemples concrets donnés en fin du paragraphe illustrent ce qui vient d'être dit).

Remarquons que la méthode, bien que plus compliquée, reste valable même lorsque l'application est une fonction homographique.

Avant d'aborder la question de l'utilisation de l'appareil des applications conformes pour la résolution des problèmes de l'élasticité concernant des domaines semi-infinis (i.e. domaines délimités par un contour ouvert), permettons-nous quelques remarques préliminaires au sujet de la configuration admissible des frontières et des restrictions à imposer aux conditions aux limites.

Soit L un contour ouvert dont les deux extrémités tendent vers l'infini et qui partage le plan en les domaines D^+ et D^-. Nous dirons positive la direction pour laquelle le domaine D^- s'avère disposé à gauche. Fixons un point $q\notin L$ et donnons-nous les points a, $b\in L$. Considérons le comportement des rayons qa et qb quand les points a et b s'en vont dans l'infini en se déplaçant dans les directions opposées et exigeons que pour un point q arbitrairement choisi existent des positions limites de ces rayons. Nous désignerons par Π l'angle formé par ces rayons limites.

On voit aisément qu'il sera le même pour tous les points situés d'un même côté du contour L, et de plus on a

$$\Pi(q) - \Pi(q') = 2\pi, \tag{5.16}$$

où les points q et q' appartiennent respectivement à D^+ et D^-.

Donnons-nous le comportement des fonctions $\Phi(z)$ et $\Psi(z)$ à l'infini :

$$\Phi(z) = \frac{\gamma}{z} + o\left(\frac{1}{z}\right), \quad \Psi(z) = \frac{\gamma'}{z} + o\left(\frac{1}{z}\right) \tag{5.17}$$

ou

$$\varphi(z) = \gamma \ln z + o(1), \quad \psi(z) = \gamma' \ln z + o(1); \tag{5.17'}$$

γ et γ' sont des constantes complexes arbitraires.

Exigeons maintenant que le vecteur résultant des efforts extérieurs soit borné; conformément à (2.9) ou (5.16) il s'écrit :

$$[P_x + iP_y]_a^b = \gamma \ln \frac{r''}{r'} + \gamma\, \Pi' i + \gamma\, (e^{2i\beta} - e^{2i\alpha}) +$$

$$+ \bar{\gamma}' \ln \frac{r''}{r'} - \bar{\gamma}' \Pi' i + \varepsilon, \tag{5.18}$$

où α et β désignent les angles que font les rayons qa et qb avec l'axe x (q étant un point arbitraire de D^+), r' et r'', les distances du point q aux points a et b, Π' un angle analogue à l'angle Π pour un point $q' \in D^-$, ε est un nombre petit tendant vers zéro quand les points a et b s'éloignent dans l'infini. Pour que le vecteur résultant soit borné (quel que soit le point $q \in D^+$ et donc quels que soient r' et r''), il faut qu'on ait $\gamma + \bar{\gamma}' = 0$. De (5.18), on a donc à la limite

$$P_x + iP_y = 2\Pi' \gamma + i(e^{2i\beta^*} - e^{2i\alpha^*})\bar{\gamma}, \tag{5.19}$$

où α^* et β^* sont les valeurs limites des angles α et β. Il est évident que $\beta^* - \alpha^* = \Pi'$. Exprimons γ par P_x et P_y sous la forme suivante :

$$\gamma = \frac{2\Pi'(P_x + iP_y) + i(e^{2i\beta^*} - e^{2i\alpha^*})(P_x - iP_y)}{4[(\Pi')^2 - \sin^2\Pi']}. \tag{5.20}$$

Lorsque $\Pi' = 0$, il est nécessaire d'exiger en outre que $P_x = P_y = 0$.

Arrêtons là l'exposé des questions générales liées à la résolution des problèmes concernant des domaines semi-infinis (vu l'analogie avec ce qui a été exposé au début de ce paragraphe) et passons à des exemples concrets.

Supposons que le milieu élastique occupe l'extérieur d'une parabole $x^2 = 4a^2(y + a^2)$ $(a > 0)$. La fonction réalisant l'application conforme sur le demi-plan est alors de la forme

$$z = \omega(\zeta) = i(\zeta - ia)^2. \tag{5.21}$$

Le parcours sera effectué de gauche à droite (l'extérieur de la parabole est D^-), donc $\Pi' = -2\pi$.

A la différence de l'approche précédente, il est préférable d'écrire la condition aux limites non sous la forme (5.1), mais directement en contraintes (cf. (2.8'')). Formulons le problème aux limites pour les fonctions $\Phi[\omega(\zeta)] = \Phi(\zeta)$ et $\Psi[\omega(\zeta)] = \Psi(\zeta)$:

$$\Phi(\sigma) + \overline{\Phi(\sigma)} + \frac{(\sigma + ia)}{2}\Phi'(\sigma) - \frac{(\sigma - ia)}{(\sigma + ia)}\Psi(\sigma) = N_\nu + iT_\nu. \tag{5.22}$$

Les fonctions N_ν et T_ν sont comme usuellement les projections du vecteur des contraintes sur la normale et la tangente au contour (i.e. les projections en coordonnées définies par l'application conforme).

Ramenons l'expression (5.22) (en multipliant par $\sigma + ia$ et prenant la valeur conjuguée) à la forme

$$(\sigma - ia)\Phi(\sigma) + (\sigma - ia)\overline{\Phi(\sigma)} + \\ + \frac{(\sigma - ia)^2}{2}\overline{\Phi'(\sigma)} - (\sigma + ia)\overline{\Psi(\sigma)} = (\sigma - ia)(N_\nu - iT_\nu). \tag{5.23}$$

Le premier terme, vu les conditions (5.17), est la valeur limite de la fonction $(\zeta - ia)\Phi(\zeta)$, analytique pour $\operatorname{Im} \zeta < 0$, y compris le point infini. Les second, troisième et quatrième termes sont les valeurs limites des fonctions $(\zeta - ia)\overline{\Phi(\zeta)}$, $(\zeta - ia)^2\overline{\Phi'(\zeta)}$ et $(\zeta + ia)\overline{\Psi(\zeta)}$, analytiques pour $\operatorname{Im} \zeta > 0$, y compris le point infini. C'est pourquoi appliquant l'opérateur de Cauchy $\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\sigma}{\sigma - \zeta}$ $(\operatorname{Im} \zeta < 0)$ aux premier et second membres de (5.23), nous obtenons d'emblée la représentation cherchée de la fonction $\Phi(\zeta)$:

$$\Phi(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i(\zeta - ia)}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(\sigma - ia)(N_\nu - iT_\nu)}{\sigma - \zeta}\,d\sigma. \tag{5.24}$$

Appliquant d'autre part l'opérateur de Cauchy à la condition conjuguée de (5.23), nous obtenons l'expression de la fonction

$\Psi(\zeta)$:

$$\Psi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i(\zeta - ia)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\sigma + ia)(N_\nu + iT_\nu)}{\sigma - \zeta} d\sigma + \frac{\zeta + ia}{\zeta - ia}\Phi(\zeta) + \frac{(\zeta + ia)^2}{2(\zeta - ia)}\Phi'(\zeta). \quad (5.25)$$

Des expressions obtenues formellement découlent d'emblée les restrictions complémentaires qu'il faut imposer aux fonctions N_ν et T_ν *).

Passons maintenant au problème mixte. Supposons que le contour L délimitant le domaine élastique soit partagé par des points α_k et β_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ en arcs γ_k d'extrémités α_k et β_k et γ_k^* d'extrémités β_k et α_{k+1}. Désignons les systèmes d'arcs γ_k et γ_k^* respectivement par L_1 et L_2 $(L = L_1 \cup L_2)$. Donnons-nous sur le contour L les conditions de type mixte

$$\varkappa\varphi(t) - t\overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)} = f_k(t) \quad (t \in \gamma_k), \quad (5.26)$$

$$\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = f_k^*(t) + c_k \quad (t \in \gamma_k^*). \quad (5.27)$$

Les fonctions f_k et f_k^* sont supposées données. Notons-les $f(t)$.

Pour construire l'équation intégrale dans le cas du problème mixte servons-nous des représentations des fonctions $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ sous la forme [133]

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega(t)dt}{t - z}, \quad (5.28)$$

$$\psi(z) = -\frac{\varkappa}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\omega(t)}dt}{t - z} + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega(t)d\bar{t}}{t - z} - \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\bar{t}\omega(t)dt}{(t - z)^2}. \quad (5.29)$$

Moyennant les formules (1.14) du chapitre I nous obtenons alors les valeurs limites $\varphi^+(t)$, $\varphi'^+(t)$, $\psi^+(t)$ que nous portons dans les conditions aux limites (5.26) et (5.27). Nous obtenons l'équation intégrale singulière

$$A(t_0)\omega(t_0) + \frac{B(t_0)}{\pi i}\int_L \frac{\omega(t)}{t - t_0}dt + \int_L k_1(t_0, t)\omega(t)\,dt + \int_L \overline{k_2(t_0, t)}\;\overline{\omega(t)}\;\overline{dt} = f(t_0) + c(t_0), \quad (5.30)$$

*) Ces restrictions doivent garantir l'existence des intégrales figurant dans (5.24) et (5.25) et veulent que les fonctions $F = N_\nu + iT_\nu$ et F' vérifient les conditions H.-L. A part cela, σF et $\sigma^2 F'$ vérifient les conditions H.-L. au voisinage du point à l'infini.

où

$$k_1(t_0, t) = \frac{\varkappa}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial t}\ln\frac{\bar{t}-\bar{t}_0}{t-t_0}, \quad k_2(t_0, t) = \frac{1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\bar{t}-\bar{t}_0}{t-t_0},$$

$$\{A(t_0), B(t_0), c(t_0)\} = \begin{cases} \dfrac{1-\varkappa}{2}, & \dfrac{1+\varkappa}{2}, \quad c_k \quad (t_0 \in L_1), \\ -\varkappa, & 0, \quad 0 \quad (t_0 \in L_2). \end{cases}$$

Comme dans (5.30) figure un terme contenant $\overline{\omega(t)}$, la condition de résolubilité de cette équation est de la forme (cf. (3.14), ch. I)

$$\mathrm{Re}\int\limits_L [f(t) + c(t)]\sigma_k(t)dt = 0 \quad (t = 1, 2, \ldots, n),$$

où $\sigma_k\,(t)$ est le système complet de solutions associées de l'équation associée, c'est-à-dire dans le cas donné bornées en tous les points (cf. § 3, ch. I).

Dans [130] il est montré que l'emploi de l'opérateur du type Cauchy à la résolution du problème mixte dans le cas où l'application est une fonction homographique permet de construire la solution sous la forme d'intégrales du type Cauchy.

Considérons à titre d'exemple quelques problèmes concrets.

Supposons que le domaine initial est un disque de rayon R. L'application est dans ce cas extrêmement simple *) : $z = \omega(\zeta) = R(\zeta)$. Comme dans (5.2) l'exposant $n = 1$, appliquant l'opérateur de Cauchy au premier membre de la condition aux limites nous obtenons dans (5.10), à gauche

$$\varphi(\zeta) + \bar{a}_1\zeta + 2\bar{a}_2 =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\sigma|=1}\frac{f\,d\sigma}{\sigma-\zeta} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\sigma|=1}\frac{f\,d\sigma}{\sigma} + \frac{\zeta}{2\pi i}\int\limits_{|\sigma|=1}\frac{f\,d\sigma}{\sigma^2} + \ldots \qquad (5.31)$$

(5.14) nous donne l'expression de $\psi(\zeta)$:

$$\psi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\sigma|=1}\frac{\bar{f}\,d\sigma}{\sigma-\zeta} - \frac{\varphi'(\zeta)}{\zeta} + \frac{a_1}{\zeta} - \overline{\varphi(0)}. \qquad (5.32)$$

La représentation (5.31) permet d'établir d'emblée les conditions de résolubilité du problème considéré et de leur donner une interprétation. En effet, comparant les coefficients des termes en

*) Il n'y a aucune nécessité, à vrai dire, de faire appel ici à une application conforme, il est préférable d'appliquer directement l'opérateur de Cauchy aux conditions aux limites ; on conserve l'approche précédente uniquement pour l'unicité de l'écriture.

ζ à gauche et à droite, on trouve

$$a_1 + \bar{a}_1 = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\sigma|=1} \frac{f\,d\sigma}{\sigma^2}. \tag{5.33}$$

Le second membre doit donc être un nombre réel. Récrivons-le, introduisant l'angle polaire θ :

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} (f_1 + if_2) e^{-i\theta} d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} (f_1 \cos\theta + f_2 \sin\theta) d\theta + \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} (-f_1 \sin\theta + f_2 \cos\theta) d\theta.$$

Il est aisé de montrer que la nullité du second terme est la condition de nullité du vecteur moment des forces extérieures (on en parlera en détail plus loin). Une remarque d'ordre général est à faire. L'erreur de la formule d'intégration employée peut entraîner la violation de cette condition, ce qui, en général, peut conduire à la non-résolubilité de l'équation (5.33). Il est clair que la partie imaginaire à droite doit s'avérer une quantité petite qu'on négligera dans les calculs.

Concrétisons maintenant les conditions aux limites. Soient appliquées aux points $z_1 = Re^{i\alpha_1}$, $z_2 = Re^{i\alpha_2}$, $\ldots$, $z_n = Re^{i\alpha_n}$ les forces concentrées $P^1_{x\nu} + iP^1_{y\nu}$, $P^2_{x\nu} + iP^2_{y\nu}$, $\ldots$, $P^n_{x\nu} + iP^n_{y\nu}$. D'après (2.10), la fonction $f(t)$ est une fonction analytique par morceaux qu'on définit explicitement. Pour plus de précision nous supposerons $f(t) = 0$ sur l'arc α_n, α_1. Dans ce cas

$$f(t) = i(P^1_{x\nu} + iP^1_{y\nu}) \text{ sur } \alpha_1, \alpha_2,$$

$$f(t) = i(P^1_{x\nu} + iP^1_{y\nu}) + i(P^2_{x\nu} + iP^2_{y\nu}) \text{ sur } \alpha_1, \alpha_3, \text{ et ainsi de suite.}$$

Les conditions d'équilibre du corps veulent qu'en terminant le parcours on obtienne de nouveau $f(t) = 0$ sur l'arc α_n, α_1. Nous pouvons écrire

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\sigma|=1} \frac{f\,d\sigma}{\sigma - \zeta} = -\frac{1}{2\pi} \{(P^1_{x\nu} + iP^1_{y\nu}) \ln(\sigma_1 - \zeta) +$$

$$+ (P^2_{x\nu} + iP^2_{y\nu}) \ln(\sigma_2 - \zeta) + \ldots + (P^n_{x\nu} + iP^n_{y\nu}) \ln(\sigma_n - \zeta)\}. \tag{5.34}$$

De même

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\sigma|=1} \frac{\bar{f}\,d\sigma}{\sigma - \zeta} = \frac{1}{2\pi} \{(P^1_{x\nu} - iP^1_{y\nu}) \ln(\sigma_1 - \zeta) +$$

$$+ (P^2_{x\nu} - iP^2_{y\nu}) \ln(\sigma_2 - \zeta) + \ldots + (P^n_{x\nu} - iP^n_{y\nu}) \ln(\sigma_n - \zeta)\}. \tag{5.35}$$

Rapportons en outre l'expression du coefficient a_1 :

$$a_1 = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{P_{x\nu}^k + iP_{y\nu}^k}{\sigma_k} \quad (z_k = R\sigma_k).$$

En vertu de (5.31) et (5.32) nous obtenons

$$\varphi(\zeta) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{n} (P_{x\nu}^k + iP_{y\nu}^k) \ln(\sigma_k - \zeta) - \\ - \frac{\zeta}{4\pi} \sum_{k=1}^{n} (P_{x\nu}^k + iP_{y\nu}^k)\overline{\sigma}_k, \quad (5.36)$$

$$\psi(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{n} (P_{x\nu}^k - iP_{y\nu}^k) \ln(\sigma_k - \zeta) - \\ - \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{P_{x\nu}^k + iP_{y\nu}^k}{\sigma_k - \zeta} \overline{\sigma}_k. \quad (5.37)$$

Donnons en conclusion les formules des fonctions $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ et des contraintes dans le cas où les forces $(P, 0)$ et $(-P, 0)$ sont appliquées aux points $z_1 = Re^{i\alpha}$ et $z_2 = Re^{i(\pi-\alpha)}$ (fig. 32) :

$$\varphi(z) = -\frac{P}{2\pi}\left[\ln(z_1 - z) - \ln(z_2 - z) + \frac{\bar{z}_1 - \bar{z}_2}{2R^2} z\right],$$

$$\psi(z) = \frac{P}{2\pi}\left[\ln(z_1 - z) - \ln(z_2 - z) - \frac{\bar{z}_1}{z_1 - z} + \frac{\bar{z}_2}{z_2 - z}\right]. \quad (5.38)$$

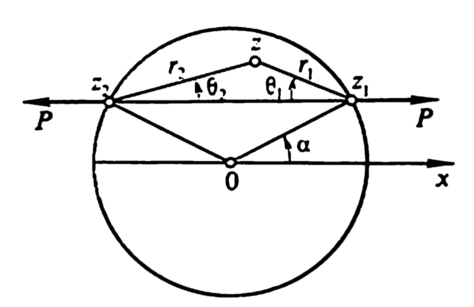


Fig. 32. Disque soumis à l'action de deux forces concentrées.

Pour représenter les composantes des contraintes il est commode d'introduire les angles polaires locaux θ_1 et θ_2 (qu'on suppose positifs lorsque le point est situé au-dessus de la ligne d'action des forces) :

$$\sigma_x = \frac{2P}{\pi}\left[\frac{\cos^3\theta_1}{r_1} + \frac{\cos^3\theta_2}{r_2}\right] - \\ - \frac{P}{\pi R}\cos\alpha,$$

$$\sigma_y = \frac{2P}{\pi}\left[\frac{\sin^2\theta_1\cos\theta_1}{r_1} + \frac{\sin^2\theta_2\cos\theta_2}{r_2}\right] - \frac{P}{\pi R}\cos\alpha, \quad (5.39),$$

$$\tau_{xy} = -\frac{2P}{\pi}\left[\frac{\sin\theta_1\cos^2\theta_1}{r_1} - \frac{\cos\theta_2\cos^2\theta_2}{r_2}\right].$$

Présente de l'intérêt le cas où $\alpha = 0$ ($z_1 = R$ et $z_2 = -R$). Considérons l'expression de la composante normale σ_y sur l'axe réel, c'est-à-dire pour $\theta_1 = \theta_2 = 0$. Comme $\alpha = 0$, nous obtenons $\sigma_y = -P/\pi R$. Cependant, ceci n'est vrai que pour les points intérieurs. Puisque $r_1 = 0$ au point z_1 et $r_2 = 0$ au point z_2, en ces points, par conséquent, les contraintes doivent être illimitées. En effet, supposons que le plan soit coupé le long du diamètre $y = 0$. Si les contraintes en ces points étaient limitées, nous aboutirions à une contradiction, puisque la solution obtenue doit correspondre au problème d'un demi-disque sollicité suivant son diamètre par une pression $P/\pi R$ et par des forces concentrées $\pm P/2$ horizontales appliquées aux points anguleux. La projection des efforts sur l'axe vertical étant égale à $2P/\pi \neq 0$, pour assurer l'équilibre il est nécessaire d'appliquer aux points anguleux des efforts de grandeur P/π. Ce qui vient d'être dit est en parfait accord avec les notions de forces concentrées (cf. § 6, ch. III), lorsque la solution peut être considérée comme solution limite en présence dans le domaine d'une cavité de dimensions décroissantes.

Passons à un autre problème. Soit un plan comportant une ouverture elliptique de demi-axes a et b. L'application est de la forme

$$z = \omega(\zeta) = \frac{a+b}{2}\left(\zeta + \frac{a-b}{a+b}\frac{1}{\zeta}\right) = A\left(\zeta + \frac{m}{\zeta}\right) \qquad (5.40)$$

$$(A > 0, \quad 0 \leqslant m \leqslant 1).$$

Après le passage à la variable auxiliaire σ la condition à la frontière s'écrit :

$$\varphi(\sigma) + \frac{1}{\sigma}\frac{\sigma^2 + m}{1 - m\sigma^2}\overline{\varphi'(\sigma)} + \overline{\psi(\sigma)} = f(\sigma). \qquad (5.41)$$

Appliquant l'opérateur de Cauchy, nous obtenons d'emblée (ζ est à l'intérieur du domaine)

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\sigma|=1} \frac{\varphi(\sigma)}{\sigma - \zeta}\,d\sigma = -\varphi(\zeta), \quad \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\sigma|=1} \frac{\overline{\psi(\sigma)}}{\sigma - \zeta}\,d\sigma = 0. \qquad (5.42)$$

Le changement de signe observé est dû à ce que le sens de parcours adopté est contraire à celui des aiguilles d'une montre.

Considérons le second terme de la condition (5.41). Il peut être traité comme valeur frontière de la fonction $\frac{1}{\zeta}\frac{\zeta^2 + m}{1 - m\zeta^2}\overline{\varphi}'\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ analytique pour $0 \leqslant m \leqslant 1$ dans le domaine $|\zeta| < 1$. Mais puisque c'est ainsi, l'application de l'opérateur de Cauchy au second terme annule celui-ci. Revenant à (5.42), nous obtenons d'emblée l'ex-

pression de la fonction $\varphi(\zeta)$:

$$\varphi(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\sigma|=1} \frac{f(\sigma)}{\sigma - \zeta}\,d\sigma. \tag{5.43}$$

Appliquant maintenant l'opérateur de Cauchy à la condition conjuguée de (5.41), nous aboutissons à l'expression de la fonction $\psi(\zeta)$:

$$\psi(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\sigma|=1} \frac{\bar f\,d\sigma}{\sigma - \zeta} - \zeta\,\frac{1 + m\zeta^2}{\zeta^2 - m}\,\varphi'(\zeta). \tag{5.44}$$

Concrétisons maintenant la condition aux frontières, admettant la charge constituée uniquement d'une pression hydrostatique d'intensité p. Donc, en vertu de (2.25)

$$f(t) = -pt = -pA\left(\sigma + \frac{m}{\sigma}\right). \tag{5.45}$$

Compte tenu de ceci nous obtenons

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\sigma|=1} \frac{f(\sigma)}{\sigma - \zeta}\,d\sigma = -\frac{pAm}{\zeta}, \quad \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\sigma|=1} \frac{\overline{f(\sigma)}}{\sigma - \zeta}\,d\sigma = -\frac{pA}{\zeta}.$$

Les expressions définitives des fonctions $\varphi(\zeta)$ et $\psi(\zeta)$ sont

$$\varphi(\zeta) = -\frac{pAm}{\zeta}, \tag{5.46}$$

$$\psi(\zeta) = -\frac{pA}{\zeta} - \frac{pAm}{\zeta}\,\frac{1 + m\zeta^2}{\zeta^2 - m}. \tag{5.47}$$

Considérons le cas limite où l'ellipse dégénère en une fente ($m = 1$, $A = a/2$). Les contraintes σ_x et σ_y dans le sens positif de l'axe réel sont :

$$\sigma_x = \sigma_y = \frac{2p}{\rho^2 - 1} \tag{5.48}$$

ou bien

$$\sigma_x = \sigma_y = \frac{p}{2}\,\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x - a}} + M(x) = \frac{K}{\sqrt{x - a}} + M(x). \tag{5.48'}$$

Le paramètre ρ est lié à la coordonnée x par la relation $x = A(\rho + 1/\rho)$, et $M(x)$ est une fonction bornée. Il ressort de (5.48) que ces contraintes croissent indéfiniment à l'approche de l'extrémité de la coupure.

Les résultats exposés permettent d'obtenir d'emblée la solution de deux autres problèmes, ceux où à l'infini sont appliquées : 1) une pression hydrostatique p, 2) une contrainte uniaxiale (le long de l'axe y). Dans le premier cas il convient de superposer à la solution cherchée une solution qui en contraintes est de la forme $\sigma_x^0 = \sigma_y^0 = p$, $\tau_{xy} = 0$. Nous retrouvons alors le problème considéré plus haut. Si de la solution ainsi obtenue on retranche la solution $\sigma_x^0 = p$ et $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$, on aboutit au deuxième problème. Dans les trois cas la solution dépend d'une même valeur du coefficient K, appelé coefficient d'intensité des contraintes, jouant un rôle exclusif en théorie de la rupture et dont il a été déjà question plus tôt (cf. § 9, chapitre III).

Illustrons l'application de la théorie exposée en considérant un problème concernant le plan à ouverture carrée. On admet qu'à l'infini a lieu un état de contrainte uniaxial et que les efforts p sont dirigés sous un angle α par rapport à l'axe x qui se confond avec l'un des côtés du carré [128]. L'application sera représentée sous la forme (1.78), ch. I, où l'on se limitera aux deux premiers termes : $\omega(\zeta) = R\left(\zeta - \frac{1}{6}\frac{1}{\zeta^3}\right)$.

Nous allons préalablement résoudre le problème pour lequel nous poserons les contraintes à l'infini nulles, tandis que les bords de l'ouverture seront sollicités par des charges correspondantes. A cet effet il nous faudra introduire les fonctions $\varphi_0(z) = 1/4\, pz$ et $\psi_0(z) = -\frac{pe^{-2i\alpha}}{2} z$. Nous aboutissons aux problèmes aux limites :

$$\varphi(\sigma) + \frac{\left(\sigma - \frac{1}{6}\frac{1}{\sigma^3}\right)}{\left(1 + \frac{1}{2}\sigma^4\right)}\overline{\varphi'(\sigma)} + \overline{\psi(\sigma)} = -\frac{pR}{2}\left[\sigma - \frac{1}{6}\frac{1}{\sigma^3} - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{6}\sigma^3\right)e^{2i\alpha}\right]. \qquad (5.49)$$

Appliquant l'opérateur de Cauchy pour $|\zeta| > 1$ nous obtenons l'égalité

$$\frac{a_1}{\zeta} + \frac{a_2}{\zeta^2} + \frac{a_3}{\zeta^3} + \ldots + \frac{\bar{a}_1}{6\zeta} = \frac{pR}{2}e^{2i\alpha}\frac{1}{\zeta} + \frac{pR}{12}\frac{1}{\zeta^3}, \qquad (5.50)$$

où a_j sont les coefficients du développement de $\varphi(\sigma)$ en série suivant les puissances négatives. Egalant les coefficients des mêmes puissances, nous obtenons le système suivant en conformité

de (5.12)

$$a_1 + \frac{\bar{a}_1}{6} = \frac{pR}{2} e^{2i\alpha}, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = \frac{pR}{12}, \quad a_n = 0 \quad (n > 3).$$

On obtient en définitive pour $\varphi(\zeta)$ la représentation

$$\varphi(\zeta) = pR\left[\left(\frac{3}{7}\cos 2\alpha + c\frac{3}{5}\sin 2\alpha\right)\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{12}\frac{1}{\zeta^3}\right].$$

De même pour la fonction $\psi(\zeta)$:

$$\psi(\zeta) = -\frac{pR}{12}\left[e^{2i\alpha}\frac{1}{\zeta^3} + \frac{13\frac{1}{\zeta} - 26\left(\frac{3}{7}\cos 2\alpha + i\frac{3}{5}\sin 2\alpha\right)\frac{1}{\zeta^3}}{2+\zeta^4}\right].$$

Dans [128] est étudiée l'influence du rayon de courbure en conservant dans l'application trois et quatre termes.

La méthode exposée de résolution de problèmes de l'élasticité est directement applicable lorsque les domaines considérés sont simplement connexes. Nous allons exposer une méthode valable pour des domaines biconnexes [136]. Elle implique la construction d'un algorithme spécial dont l'étape principale est la résolution du problème auxiliaire correspondant pour le domaine simplement connexe. Or, ce problème auxiliaire se résout justement par la méthode exposée plus haut.

Soit un domaine fini D délimité par les contours L_0 et L_1. Nous partirons des conditions aux limites

$$\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = f_1(t) + c \quad (t \in L_1), \tag{5.51}$$

$$\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = f_2(t) \quad (t \in L_0). \tag{5.52}$$

Sans restreindre la généralité, nous supposerons dans la suite $f_2 \equiv 0$.

Introduisons sur l'un des contours, disons sur L_0, une fonction auxiliaire

$$2\omega(t) = \varphi(t) - t\overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)}. \tag{5.53}$$

De (5.52) et (5.53) nous tirons alors les égalités

$$\varphi(t) = \omega(t), \tag{5.54}$$

$$\psi(t) = -\overline{\omega(t)} - \bar{t}\omega'(t). \tag{5.55}$$

La fonction $\omega(t)$ de (5.54) sera considérée comme densité de l'intégrale du type Cauchy $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0}\frac{\omega(t)}{t-z}\,dt$. D'après les formules

de Sokhotski-Plémelj (1.14'), ch. I, on peut l'exprimer sous la forme du saut des valeurs limites, ce qui permet de représenter l'égalité (5.54) de la manière suivante

$$\varphi(t)-\lim_{\substack{z\to t\\ z\in D_0^+}}\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\frac{\omega(t)}{t-z}\,dt=-\lim_{\substack{z\to t\\ z\in D_0^-}}\frac{1}{2\pi i}\int_{L^0}\frac{\omega(t)}{t-z}\,dt. \qquad (5.56)$$

La fonction $\varphi(t)$ est la valeur limite d'une fonction analytique dans le domaine D, la fonction $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0}\frac{\omega(t)}{t-z}\,dt$ $(z\in D_0^+)$, celle d'une fonction analytique dans D_0^+ et enfin la fonction $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0}\frac{\omega(t)}{t-z}\,dt$ $(z\in L_0^-)$, la valeur limite d'une fonction analytique dans D_0^-. Donc le premier membre de (5.56) est la valeur limite d'une fonction analytique dans D et le second membre, celle d'une fonction analytique dans D_0. Comme leurs valeurs limites sont égales, on peut dire qu'elles représentent une seule fonction analytique dans le domaine $D_1^-=D\cup D_0^-$, que nous noterons par la suite $\varphi^*(z)$. Ainsi nous avons

$$\varphi^*(z)=\varphi(z)-\frac{1}{2\pi i}\int_{\substack{L_0\\ z\in D}}\frac{\omega(t)}{t-z}\,dt,\qquad \varphi^*(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\substack{L_0\\ z\in D_0^-}}\frac{\omega(t)}{t-z}\,dt. \qquad (5.57)$$

Des constructions analogues réalisées pour la fonction $\psi(z)$ nous conduisent à une nouvelle fonction $\psi^*(z)$, analytique dans le domaine D_1^- et représentable dans les domaines D et D_0^- respectivement sous la forme

$$\psi^*(z)=\psi(z)+\frac{1}{2\pi i}\int_{\substack{L_0\\ z\in D}}\frac{\overline{\omega(t)}+\bar{t}\omega'(t)}{t-z}\,dt,\quad \psi^*(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\substack{L_0\\ z\in D_0^-}}\frac{\overline{\omega(t)}+\bar{t}\omega'(t)}{t-z}\,dt. \qquad (5.58)$$

Les fonctions $\varphi^*(z)$ et $\psi^*(z)$ étant analytiques dans le domaine D_1^-, le problème de leur détermination (supposant provisoirement $\omega(t)$ donnée) se ramène à la résolution du problème correspondant de l'élasticité pour ce domaine. La condition aux limites s'obtient assez simplement à partir des égalités (5.57) et (5.58), mais son expression explicite étant très volumineuse, nous l'écri-

vons sous forme symbolique :

$$\varphi^*(t) + t\overline{\varphi^*(t)} + \overline{\psi^*(t)} = f_1(t) + c + H(\omega, t). \tag{5.59}$$

Soit $\varphi^*(z) = H_1[\omega(t), z]$ et $\psi^*(z) = H_2[\omega(t), z]$ la solution du problème (5.59). A l'aide de (5.53), nous obtenons pour $\omega(t)$ une équation intégrale de Fredholm de deuxième espèce *)

$$\omega(t_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_0} \omega(t) d \ln \frac{t - t_0}{\bar{t} - \bar{t}_0} + \frac{1}{2\pi i}\int_{L_0} \overline{\omega(t)}\, d\frac{t - t_0}{\bar{t} - \bar{t}_0} +$$
$$+ \left\{H_1[\omega(t), t_0] - t_0 \frac{\partial H_1[\omega(t), t_0]}{\partial t_0} - H_2\overline{[\omega(t),\ t_0]}\right\} + H_3[\omega(t),\ t_0], \tag{5.60}$$

où par H_3 $[\omega(t), t_0]$ sont notées les composantes définies par les termes complémentaires de (5.57) et (5.58). L'algorithme se termine par la résolution de l'équation (5.60).

L'emploi de la méthode exposée plus haut est particulièrement simple dans le cas où le contour sur lequel on introduit une fonction auxiliaire est un cercle. On peut alors prendre la fonction $\omega(t)$ sous la forme d'une série de Fourier et chercher ensuite la solution de l'équation (5.60) en développant ses deux membres en une série de Fourier. On obtiendra pour les coefficients de la fonction $\omega(t)$ un système d'équations infini.

On montre dans [107] que si le problème auxiliaire pour un domaine simplement connexe se résout à l'aide de l'appareil des applications conformes avec l'utilisation des intégrales du type Cauchy, alors dans le cas où l'application est un polynôme, on obtient un système d'équations algébriques quasi-régulier. On propose en outre un algorithme permettant de prouver, avec un nombre déterminé de calculs, que le système est complètement régulier si tel est le cas.

Notons que la méthode de la fonction auxiliaire $\omega(t)$ permet de résoudre le problème dans le cas où sur le contour L_1 sont données des conditions de type mixte **) ainsi que lorsque le contour L_1 dégénère en une fente [164].

L'appareil des intégrales du type Cauchy permet de résoudre le problème de déformation plane suivant [131]. Soit un corps composé de deux corps, l'un délimité par le contour L_1 et l'autre par le contour L_3 et encore un contour, L_2, englobant le contour L_1. Les contraintes extérieures étant supposées égales sur le

*) On obtient pour $\omega(t)$ une équation singulière si l'on a recours à la condition (5.52).

**) Il s'agit, bien entendu, des cas où le problème mixte pour le domaine D_1^- peut être effectivement résolu.

contour de contact L_1 de deux milieux, on doit avoir l'égalité

$$\varphi_1(t) + t\overline{\varphi_1'(t)} + \overline{\psi_1(t)} = \varphi_2(t) + t\overline{\varphi_2'(t)} + \overline{\psi_2(t)}, \qquad (5.61)$$

où φ_1, ψ_1 et φ_2, ψ_2 sont des potentiels complexes dans les domaines *1* et *2* respectivement.

Nous admettons qu'avant la formation du corps composé (à l'état de référence) le corps intérieur avait des dimensions un peu plus grandes. Par conséquent, on doit avoir

$$\varkappa\varphi_1(t) - t\overline{\varphi_1'(t)} - \overline{\psi_1(t)} = \varkappa\varphi_2(t) - t\overline{\varphi_2'(t)} - \overline{\psi_2(t)} + \frac{\delta(t)}{2\mu}, \qquad (5.62)$$

à condition de supposer qu'après l'introduction d'un corps dans l'autre il y ait adhérence. La fonction $\delta(t)$ tient justement compte de la différence de dimensions de la frontière de contact des deux corps.

Supposons que sur L_2 ont lieu les conditions du premier type

$$\varphi_2(t) + t\overline{\varphi_2'(t)} + \overline{\psi_2(t)} = f(t). \qquad (5.63)$$

Ajoutant (5.61) et (5.62) on trouve

$$\varphi_1(t) = \varphi_2(t) + \delta_1(t), \quad t \in L_1, \quad \delta_1(t) = \frac{\delta(t)}{(1+\varkappa)2\mu}. \qquad (5.64)$$

Retranchant (5.62) de (5.61) préalablement multiplié par $\varkappa$, on obtient, compte tenu de (5.64),

$$\psi_1(t) = \psi_2(t) + \overline{\delta_1(t)} + \bar{t}\delta_1'(t), \quad t \in L_1. \qquad (5.65)$$

Formons maintenant dans le domaine *1* la fonction

$$\varphi(z) = \varphi_1(z) + \frac{1}{2\pi i}\int_{L_1} \frac{\delta_1(t)}{t-z}\,dt, \qquad (5.66)$$

et dans le domaine *2* la fonction

$$\varphi(z) = \varphi_2(z) + \frac{1}{2\pi i}\int_{L_1} \frac{\delta_1(t)}{t-z}\,dt. \qquad (5.67)$$

Déterminons les valeurs limites de ces fonctions à l'approche du contour L_1. En vertu de (1.14), ch. I, nous avons

$$\begin{aligned} \varphi^+(t) &= \varphi_1^+(t) + \frac{1}{2}\delta_1(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_{L_1} \frac{\delta_1(t)}{t-z}\,dt, \\ \varphi^-(t) &= \varphi_2^-(t) - \frac{1}{2}\delta_1(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_{L_1} \frac{\delta_1(t)}{t-z}\,dt. \end{aligned} \qquad (5.68)$$

De (5.64) on déduit que ces valeurs limites coïncident. On a donc dans le domaine *1* + *2* une fonction $\varphi(z)$ analytique unique. Des raisonnements analogues pour les fonctions $\psi_1(z)$ et $\psi_2(z)$ nous conduisent à une fonction $\psi(z)$, la même et analytique dans le domaine *1* + *2*, donnée dans le domaine *1* par l'expression

$$\psi(z) = \psi_1(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{\overline{\delta_1(t)} + \bar{t}\delta_1'(t)}{t - z}\, dt$$

et dans le domaine *2* par l'expression

$$\psi(z) = \psi_2(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{\overline{\delta_1(t)} + \bar{t}\delta_1'(t)}{t - z}\, dt.$$

Attirant la condition sur le contour L_2 nous obtenons

$$\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = f(t) + H(\delta_1, t). \qquad (5.69)$$

On a noté $H(\delta_1', t)$ les apports dûs à des termes complémentaires.

Le problème de calcul des contraintes et des déplacements dans un corps composé s'est donc ramené à celui pour un corps homogène. Ayant résolu ce dernier problème, on trouve facilement les contraintes et les déplacements dans les pièces constituant le corps composé, en prenant en considération les termes complémentaires, différents pour chaque pièce.

Il est clair que l'approche proposée s'applique aux cas de plusieurs inclusions, bien plus, aux cas où une pièce comporte plusieurs inclusions.

§ 6. Méthode de conjugaison

L'exposé précédent montre que les problèmes de contact (ainsi que les problèmes de l'élasticité pour des corps présentant des coupures, cf. § 7) peuvent être ramenés à des équations intégrales singulières, qui à leur tour se laissent ramener au problème aux limites de Riemann. Dans quelques cas particuliers cependant on arrive à ramener le problème directement au problème aux limites de Riemann [95].

Le procédé que nous allons exposer s'appelle *méthode de conjugaison*. Soit D^+ et D^- les demi-plans supérieur et inférieur. Considérons une fonction $\varphi(z)$ analytique dans D^+. Introduisons dans D^- une fonction que nous noterons $\overline{\varphi}(z)$ et que nous définirons par la formule

$$\overline{\varphi}(z) = \overline{\varphi(\bar{z})} \quad (z \in D^+, \quad \bar{z} \in D^-). \qquad (6.1)$$

Le prolongement ainsi défini sera dit ***prolongement par conjugaison***. D'une manière analogue, une fonction analytique dans D^- peut

être prolongée dans le domaine D^+. On peut montrer que la fonction $\overline{\varphi}(z)$ est analytique dans D^-. Il est évident que les valeurs limites (sur l'axe réel) des fonctions $\varphi(z)$ et $\overline{\varphi}(z)$ vérifient les relations

$$\overline{\varphi}^-(t) = \overline{\varphi^+(t)}, \quad \overline{\varphi}^+(t) = \overline{\varphi^-(t)}. \tag{6.2}$$

On déduit des relations (6.2) que si sur un intervalle de l'axe réel on a $\operatorname{Im} \varphi^+(t) = 0$, la fonction $\overline{\varphi}(z)$ est le prolongement analytique de la fonction $\varphi(z)$ dans le domaine D^-, et inversement.

Envisageons maintenant le problème de l'élasticité pour le demi-plan D^- avec la condition à l'infini

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= -\frac{P_x + iP_y}{2\pi}\frac{1}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right), \\ \Psi(z) &= \frac{P_x - iP_y}{2\pi}\frac{1}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right) \end{aligned} \tag{5.17}$$

que nous avons introduite au § 5; P_x et P_y sont les projections du vecteur résultant des efforts extérieurs sur les axes x et y.

Prolongeons par conjugaison les fonctions $\Phi(z)$ et $\Psi(z)$ dans le domaine D^+; les prolongements seront désignés par $\overline{\Phi}(z)$ et $\overline{\Psi}(z)$. Introduisons dans le domaine D^+ une nouvelle fonction analytique $\Phi_1(z)$:

$$\Phi_1(z) = -\overline{\Phi}(z) - z\overline{\Phi}'(z) - \overline{\Psi}(z) \quad (z \in D^+). \tag{6.3}$$

Effectuant alors dans les deux membres de (6.3) l'opération du prolongement, nous obtenons

$$\overline{\Phi}_1(z) = -\Phi(z) - z\Phi'(z) - \Psi(z) \tag{6.4}$$

ou bien

$$\Psi(z) = -\overline{\Phi}_1(z) - \Phi(z) - z\Phi'(z). \tag{6.4'}$$

La formule (6.4′) permet de passer dans la représentation des contraintes (2.8) aux fonctions $\Phi(z)$ et $\Phi_1(z)$ dont la première est analytique dans D^- et la seconde dans D^+. Ecrivons l'expression correspondante de la combinaison des contraintes $\sigma_y - i\tau_{xy}$ dont nous aurons besoin dans la suite :

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = \Phi(z) + (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)} - \Phi_1(\bar{z}). \tag{6.5}$$

Supposons ensuite que presque en tous les points de l'axe réel $\lim\limits_{z\to t} \Phi(t) = \Phi^-(t)$, à l'exception de quelques points où néanmoins on a $\lim\limits_{z\to t} y\overline{\Phi'(z)} = 0$. Passant alors dans (6.5) vers les points de

l'axe réel et omettant l'indice désormais inutile de la fonction $\Phi_1(z)$ *) nous parvenons au problème aux limites de Riemann

$$\Phi^-(t) - \Phi^+(t) = (\sigma_y - i\tau_{xy})|_{\mathrm{Im}\, z=0} = f(t), \tag{6.6}$$

où $f(t)$ est une fonction donnée.

On trouve donc d'emblée la solution du deuxième problème fondamental de l'élasticité pour le demi-plan. En effet, la fonction analytique par morceaux $\Phi(z)$ se représente sous la forme

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)\,dt}{t - z}. \tag{6.7}$$

Bien entendu, la définition des contraintes en tel ou tel point z nécessite la connaissance de la fonction $\Phi(z)$ au point conjugué.

Pour le premier problème fondamental il faut connaître, sur la frontière, une relation entre les fonctions $\Phi(z)$ et $\Psi(z)$ et non entre $\varphi(z)$ et $\psi(z)$. Pour l'obtenir, dérivons (2.7) par rapport à la variable x :

$$\varkappa\Phi(z) - \overline{\Phi(z)} - \overline{z\Phi'(z)} - \overline{\Psi(z)} = 2\mu(u' + iv'). \tag{6.8}$$

(u' et v' sont les dérivées des déplacements par rapport à x). Eliminant $\Psi(z)$ à l'aide de (6.4'), nous obtenons

$$\varkappa\Phi(z) + (\bar{z} - z)\overline{\Phi'(z)} + \Phi_1(z) = 2\mu(u' + iv'). \tag{6.9}$$

Passant maintenant à la limite pour $z \to t$, nous retrouvons le problème aux limites de Riemann

$$\varkappa\Phi^-(t) + \Phi^+(t) = 2\mu(u' + iv')_{\mathrm{Im}\, z=0} = f(t). \tag{6.10}$$

Sa résolution nécessite l'introduction d'une fonction auxiliaire analytique par morceaux ; nous la noterons $\Omega(z)$ et nous la définirons de la manière suivante :

$$\Omega(z) = \Phi(z) \quad (y > 0), \quad \Omega(z) = -\varkappa\Phi(z) \quad (y < 0). \tag{6.11}$$

Pour cette fonction le problème aux limites s'écrit

$$\Omega^+(t) - \Omega^-(t) = f(t), \tag{6.12}$$

dont on trouve élémentairement la solution

$$\Omega(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)\,dt}{t - z}. \tag{6.13}$$

---

*) Les fonctions $\Phi(z)$ et $\Phi_1(z)$ sont considérées dans ce qui suit comme les valeurs dans D^- et D^+ d'une même fonction analytique par morceaux $\Phi(z)$.

Présente naturellement de l'intérêt l'application de la méthode de conjugaison à la résolution des problèmes de contact pour le demi-plan. Soit sur l'axe réel, frontière du demi-plan, un ensemble de points a_1, b_1, a_2, b_2, ..., a_n, b_n. Sur les segments a_j, b_j (système de segments L) sont donnés les déplacements (c'est-à-dire qu'on considère le problème de l'enfoncement des étampes avec adhérence), et sur les segments $(-\infty, a_1)$, (b_j, a_{j+1}), (b_n, ∞) (système de segments M) sont données les contraintes.

Sur le système de segments M les contraintes seront supposées nulles. On peut les annuler en cherchant une solution particulière du deuxième problème fondamental, se donnant complémentairement sur les segments L, par exemple, des contraintes nulles. Par superposition on obtiendra sur le système M les conditions aux limites homogènes et sur le système L les conditions aux limites modifiées en conséquence. (6.6) avec (6.11) est donc un problème aux limites de Riemann à coefficients discontinus :

$$\begin{aligned} \Phi^-(t) - \Phi^+(t) &= 0 \quad (t \in M), \\ \varkappa\Phi^-(t) + \Phi^+(t) &= f(t) \quad (t \in L). \end{aligned} \tag{6.14}$$

Comme sur le système L les seconds membres sont définis par les dérivées des déplacements donnés, le problème aux limites est en fait posé pour le cas où les déplacements d'étampes sont donnés à une translation près, que l'on détermine au cours de la résolution du problème à partir de conditions complémentaires liées aux efforts appliqués. On détermine les moments après avoir trouvé la distribution de la pression.

La solution du problème (6.14) s'écrit

$$\begin{gathered} \Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)\,dt}{X(t)\,(t-z)} + \frac{1}{2}X(z)P_{n-1}(z), \\ X(z) = \prod_{k=1}^{n}(z-a_k)^{-\frac{1}{2}+i\beta}(z-b_k)^{-\frac{1}{2}-i\beta} \\ \left(\beta = \frac{1}{2\pi}\ln\varkappa\right). \end{gathered} \tag{6.15}$$

Ici $P_{n-1}(z)$ est un polynôme de degré non supérieur à $n-1$, contenant n constantes complexes c_j; $X(t)$ sont les valeurs qu'admet à gauche la fonction $X(z)$ univoque dans le plan présentant le système de coupures L et telle que $z^n X(z) \to 1$ pour $z \to \infty$.

En vertu de la formule de Sokhotski-Plémelj nous obtenons sur le système de coupures L

$$\Phi^+(t_0) = \frac{1}{2}f(t_0) + \frac{X(t_0)}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)\,dt}{X(t)\,(t-t_0)} + \frac{X(t_0)}{2}P_{n-1}(t_0). \tag{6.15'}$$

Pour trouver les contraintes de contact, il est nécessaire conformément à (6.6) de construire la fonction $\Phi^-(t)$. Le plus simple est de la reconstituer à partir de la seconde condition (6.14). Nous obtenons finalement

$$P + iT = \frac{\varkappa - 1}{2\varkappa} f(t_0) + \frac{\varkappa + 1}{\varkappa} \frac{X(t_0)}{2\pi i} \times$$

$$\times \int_L \frac{f(t)\, dt}{X(t)(t - t_0)} + \frac{\varkappa + 1}{2\varkappa} X(t_0) P_{n-1}(t_0) \quad (t \in L). \qquad (6.15'')$$

Pour la généralité de la solution (6.15) on doit admettre en tous les points extrêmes des singularités non bornées mais, naturellement, intégrables. La solution contient des constantes arbitraires c_j.

Passons à leur détermination. Pour l'ensemble des étampes considérons deux positions du problème. Dans le premier cas les étampes se déplacent indépendamment et en qualité de conditions complémentaires pour trouver les constantes on prend les vecteurs résultants des efforts s'exerçant sur chaque étampe. Dans le deuxième cas seul le vecteur résultant global des efforts est connu.

Dans le premier cas nous obtenons les égalités

$$\int_{(a_j, b_j)} [P(t_0) + iT(t_0)]\, dt_0 = -P_{xk} + iP_{yk} \quad (k = 1, 2, \dots n), \qquad (6.16)$$

qui représentent un système de n équations complexes à n inconnues complexes.

Dans le second cas nous partirons des égalités

$$0 = [u(a_{k+1}) + iv(a_{k+1})] - [u(b_k) + iv(b_k)] =$$

$$= \int_{b_k}^{a_{k+1}} (u'^- + iv'^-)\, dt_0 \quad (k = 1, 2, \dots, n - 1), \qquad (6.17)$$

traduisant la constance de la distance entre les points extrêmes des étampes lors de l'enfoncement. Pour construire ces égalités utilisons les expressions des dérivées des déplacements sur les segments du système M :

$$2\mu(u'^- + iv'^-) = (\varkappa + 1)\Phi(t_0) =$$

$$= (\varkappa + 1)\Phi_0(t_0) + (\varkappa + 1)X(t_0)P_{n-1}(t_0). \qquad (6.18)$$

Le système (6.17) ne contient que $n - 1$ équations. On obtient encore une équation à partir de la condition imposée au vecteur résultant des efforts $P_x + iP_y$ appliqués à l'ensemble des étampes. Cette condition peut être exprimée directement par la fonction $\Phi(z)$:

$$\lim_{z\to\infty} z\Phi(z) = -\frac{1}{2\pi}(P_x + iP_y).$$

Par suite

$$c_{n-1} = -\frac{1}{2\pi}(P_x + iP_y). \tag{6.19}$$

Les résultats exposés plus haut permettent de considérer le cas où les contraintes sont supposées limitées aux extrémités des étampes. Cette hypothèse est équivalente à l'hypothèse de leur nullité (si $f(t)$ est de classe H.-L.). La pression de contact peut être obtenue comme dans (6.15″) ou bien directement à partir de (6.15), mais en imposant à l'expression de $X(z)$ des restrictions complémentaires. Dans ce cas changeront les conditions du problème et pour assurer sa résolubilité il convient de poser inconnue la position des points a_j et b_j également (ceci correspond à la position physique des problèmes de contact de ce genre).

Abordons maintenant le problème de l'enfoncement d'un système d'étampes sans adhérence. Dans ce cas nous supposons de même que sur le système de segments M a lieu la première condition (6.14). Sur le système L par contre nous supposons nulles les contraintes tangentielles et connus les déplacements normaux (peut-être à des constantes réelles près), i.e.

$$v(t) = g(t) + c_k \quad (t \in (a_k, b_k)). \tag{6.20}$$

Donc $\tau_{xy} = 0$ sur tout l'axe réel.

Dans ce cas également on peut poser le problème de deux façons. Dans le premier cas les étampes sont rigidement liées et l'on donne l'effort P_y s'exerçant sur l'ensemble d'étampes. Dans le deuxième cas les étampes se déplacent indépendamment et l'on donne les efforts s'exerçant sur chaque étampe.

Utilisons la condition $\tau_{xy} = 0$ sur tout l'axe $\operatorname{Im} z = 0$. Combinant la condition (6.6) à celle qui s'en obtient par passage à la conjuguée (compte tenu de (6.2)), nous obtenons

$$-2i\,\tau_{xy} = \Phi^-(t) + \overline{\Phi}^-(t) - \Phi^+(t) - \overline{\Phi}^+(t) = 0. \tag{6.21}$$

Par conséquent,

$$\Phi^+(t) + \overline{\Phi}^+(t) = \Phi^-(t) + \overline{\Phi}^-(t), \tag{6.22}$$

d'où il découle que la fonction $\Phi(z) + \overline{\Phi}(z)$ est analytique dans tout le plan et, compte tenu de (5.17), nulle. Donc

$$\overline{\Phi}(z) = -\Phi(z). \tag{6.23}$$

Représentons comme auparavant les conditions aux limites pour les dérivées des déplacements dans la direction de l'axe x sous la forme

$$2\mu v'(t) = f_1(t) \quad (t \in L). \tag{6.24}$$

Utilisant l'expression du premier membre de (6.10), récrivons la condition (6.24) pour la fonction $\Phi(z)$:

$$\frac{4\mu i v'}{\varkappa + 1} = \Phi^-(t) + \Phi^+(t) = \frac{2f_1(t)}{\varkappa + 1} = f(t) \quad (t \in L). \tag{6.25}$$

Récrivons également la condition (6.6) :

$$\Phi^-(t) - \Phi^+(t) = 0 \quad (t \in M).$$

On obtient de la sorte le problème aux limites de Riemann dont la solution est la fonction

$$\begin{gathered}\Phi(z) = \frac{1}{\pi X(z)} \int_L \frac{X(t)\, f(t)\, dt}{t - z} + \frac{P_{n-1}(z)}{X(z)}, \\ X(z) = \sqrt{(z - a_1)(z - b_1) \ldots (z - a_n)(z - b_n)},\end{gathered} \tag{6.26}$$

$X(z)$ désigne ici la branche, univoque sur le plan coupé suivant L et telle que $z^{-n}X(z) \to 1$ pour $|z| \to \infty$, et

$$X(t) = \sqrt{(t - a_1)(t - b_1) \ldots (t - a_n)(t - b_n)}.$$

Montrons que le premier terme vérifie la condition (6.23). Nous avons

$$\overline{\Phi}(z) = \frac{1}{\pi \overline{X}(z)} \int_L \frac{\overline{X(t)\, f(t)}\, dt}{t - z}. \tag{6.27}$$

La fonction $X(z)$ est telle que $\overline{X}(z) = \pm X(z)$. Pour savoir au juste quel signe prendre il faut considérer le comportement de ces fonctions pour de grandes valeurs de $|z|$. $\overline{X}(z)$ et $X(z)$ étant à l'infini de l'ordre de z^n, il faut prendre le signe supérieur. En vertu de (6.2), aux points du système L, $\overline{X(t)} = -X(t)$. Ainsi, notre proposition est démontrée. Le second terme vérifiera la condition (6.23) si tous les coefficients du polynôme sont des nombres imaginaires. La pression exercée par l'étampe est donc

$$P(t_0) = \frac{2}{\pi X(t_0)} \int_L \frac{X(t)\, f(t)}{t - t_0}\, dt + \frac{2P_{n-1}(t_0)}{X(t_0)}. \tag{6.28}$$

Les coefficients du polynôme se déterminent à l'aide des raisonnements analogues à ceux employés pour les étampes appliquées avec adhérence. Quand, par exemple, les étampes se déplacent en bloc, on posera nulle seule la différence des déplacements verticaux des points b_j et a_{j+1}.

Pour la position physique du problème sur l'enfoncement d'une étampe avec adhérence il faut imposer une restriction complémentaire sur la solution, plus précisément, demander que la contrainte de contact soit négative. Dans le cas contraire il se formera entre l'étampe et le corps élastique un interstice, ce qui changera radicalement la position du problème aux limites, puisque le point en lequel cesse le contact de l'étampe et du corps devient mobile et donc sera déterminé au cours de la résolution du problème (pour plus de détails cf. [95]).

Envisageons maintenant le problème de contact de deux demi-plans élastiques ayant des caractéristiques différentes. Le schéma proposé peut servir de base au problème de contact de deux corps de configuration suffisamment arbitraire, quand l'aire de contact est petite devant les dimensions des corps. On utilisera indépendamment la solution pour chacun des demi-plans pour formuler, à partir de la condition d'égalité des contraintes de contact et des déplacements sur la frontière, le problème aux limites de Riemann. On sera amené, comme dans le cas spatial général, au problème d'enfoncement d'une étampe rigide dans le demi-plan élastique, lorsque le profil de l'étampe dépend de façon définie des profils de chacun des corps élastiques et de leurs constantes élastiques.

Voyons maintenant comment la méthode de conjugaison s'applique aux problèmes de l'élasticité posés pour un plan présentant des coupures. Le problème aux limites sera formulé comme suit : soit un ensemble de coupures $L_1, L_2, \ldots, L_m$ situées sur une même droite choisie comme axe réel. Sur les bords des coupures sont données les charges

$$\sigma_y^+, \; \tau_{xy}^+, \; \sigma_y^-, \; \tau_{xy}^-.$$

Le signe « + » se rapporte aux bords supérieurs des coupures, le signe « — », aux bords inférieurs. Comme auparavant, nous partirons des représentations (5.17), où P_x et P_y sont toujours les projections sur les axes x et y du vecteur résultant des efforts s'exerçant sur les bords des coupures. Les fonctions $\Phi(z)$ et $\Psi(z)$ sont maintenant analytiques dans tout le plan, excepté les coupures. Réalisons une procédure dite aussi prolongement par conjugaison et consistant en la construction dans tout le domaine de fonctions $\bar{\Phi}(z) = \overline{\Phi(\bar{z})}$ et $\bar{\Psi}(z) = \overline{\Psi(\bar{z})}$. Formons une nouvelle fonction

$$\Omega(z) = \bar{\Phi}(z) + z\bar{\Phi}'(z) + \bar{\Psi}(z). \tag{6.29}$$

Eliminant à l'aide de (6.29) la fonction $\Psi(z)$ de l'expression (6.5), nous obtenons

$$\Phi(z) + (z - \bar{z})\overline{\Phi}'(z) + \Omega(\bar{z}) = \sigma_y - i\tau_{xy}. \qquad (6.30)$$

Passant maintenant à la limite pour $z \to t$ (pour les mêmes restrictions que précédemment sur le comportement de la fonction aux extrémités des coupures) nous aboutissons à un problème aux limites de Riemann pour le système de fonctions $\Phi(z)$ et $\Omega(z)$:

$$\begin{aligned} \Phi^+(t) + \Omega^-(t) &= \sigma_y^+ - i\tau_{xy}^+ = p(t), \\ \Phi^-(t) + \Omega^+(t) &= \sigma_y^- - i\tau_{xy}^- = q(t). \end{aligned} \qquad (6.31)$$

Transformant celui-ci, nous obtenons deux problèmes aux limites de Riemann :

$$\begin{aligned} [\Phi + \Omega]^+ + [\Phi + \Omega]^- &= p + q, \\ [\Phi - \Omega]^+ - [\Phi - \Omega]^- &= p - q, \end{aligned} \qquad (6.32)$$

dont nous avons obtenu plus haut la solution.

Les constantes entrant dans la solution générale sont tirées de la condition d'univocité des déplacements lors du parcours de chacune des coupures.

La méthode de conjugaison s'utilise efficacement pour la résolution des problèmes de contact lorsque le corps élastique est délimité par un arc de cercle, ainsi que des problèmes fondamentaux où les coupures sont disposées le long d'un arc de cercle. Dans ce cas le prolongement de la fonction $\Phi(z)$ par conjugaison sera la fonction $\overline{\Phi(1/z)}$.

Nous concluons le paragraphe par des exemples illustrant la méthode de conjugaison.

Considérons le problème relatif à l'enfoncement d'une étampe de longueur $2l$ à base rectiligne ($f(t) = 0$) pour des conditions $P_x = 0$ et $P_y = -P_0$. Dans ce cas les formules (6.15) et (6.15′) donnent d'emblée la solution sous la forme

$$\Phi(z) = \frac{iP_0}{2\pi}(z + l)^{-\frac{1}{2}+i\beta}(z - l)^{-\frac{1}{2}-i\beta}. \qquad (6.33)$$

Rapportons les expressions définitives des pressions de contact :

$$P(t) = \frac{P_0(1 + \varkappa)}{\pi\sqrt{l^2 - t^2}\sqrt{\varkappa}} \cos\left[\frac{\ln \varkappa}{2\pi} \ln \frac{l - t}{l - t}\right], \qquad (6.34)$$

$$T(t) = \frac{P_0(1 + \varkappa)}{\pi\sqrt{l^2 - t^2}\sqrt{\varkappa}} \sin\left[\frac{\ln \varkappa}{2\pi} \ln \frac{l + t}{l - t}\right]. \qquad (6.35)$$

Remarquons que les formules asymptotiques des pressions de contact se confondent, comme on devait s'y attendre, avec celles qui s'obtiennent en utilisant la solution de l'équation transcendante (9.37), ch. III, pour un coin d'angle π, quand sur l'une des faces sont donnés les déplacements et sur l'autre des contraintes. A l'approche des points extrêmes, les contraintes de contact changent de signe un nombre illimité de fois, tendant vers l'infini, tandis que la zone d'oscillation est extrêmement petite et constitue 0,0003 de la longueur de l'étampe.

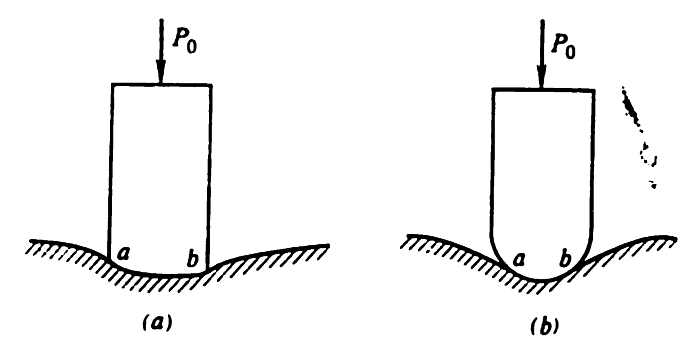


Fig. 33. Enfoncement d'une étampe dans le demi-plan : a) adhérence complète ; b) adhérence partielle.

Etudions plus en détail le cas de l'enfoncement sans frottement d'une étampe lisse (fig. 33). En vertu de (6.27), la pression est donnée par

$$P(t_0) = \frac{2}{\pi\sqrt{(t_0-a)(b-t_0)}} \int_a^b \frac{\sqrt{(t-a)(b-t)}}{t-t_0} f(t)\,dt + \\ + \frac{2D}{\sqrt{(t_0-a)(b-t_0)}}. \qquad (6.36)$$

La constante réelle D est tirée de la condition (6.19) : $D = P/2\pi$. Après avoir construit formellement la solution, il faut vérifier la réalisation de la condition $P \leqslant 0$.

Supposons que l'étampe n'adhère pas complètement au demi-plan, de sorte que la position des points a et b devient inconnue. Cependant, l'expression (6.36) permet dans ce cas également d'obtenir un résultat exhaustif. La position indéterminée des points frontières de contact nécessite que soient vérifiées les conditions

$$P(a) = P(b) = 0. \qquad (6.37)$$

Montrons que ces conditions sont équivalentes à celles qu'on impose à la solution pour qu'elle soit bornée. Le fait qu'une solution

est bornée implique sa nullité. Introduisant la notation $Q(t) = (t-a)(b-t)$ récrivons (6.36) sous la forme

$$\frac{2}{\pi\sqrt{Q(t_0)}}\int_a^b \frac{[Q(t)-Q(t_0)]f(t)\,dt}{(t-t_0)\sqrt{Q(t)}} + \frac{2\sqrt{Q(t_0)}}{\pi}\int_a^b \frac{f(t)\,dt}{(t-t_0)\sqrt{Q(t)}} + \frac{2D}{\sqrt{Q(t_0)}} =$$

$$= \frac{2\sqrt{Q(t_0)}}{\pi}\int_a^b \frac{f(t)\,dt}{(t-t_0)\sqrt{Q(t)}} + \frac{At_0+B+2D}{\sqrt{Q(t_0)}}, \qquad (6.38)$$

$$A = -\frac{2}{\pi}\int_a^b \frac{f(t)\,dt}{\sqrt{Q(t)}},$$

$$B = -\frac{2}{\pi}\int_a^b \frac{tf(t)\,dt}{\sqrt{Q(t)}} + \frac{2(a+b)}{\pi}\int_a^b \frac{f(t)\,dt}{\sqrt{Q(t)}}.$$

Utilisant les estimations (1.25), ch. I, on montre que le premier terme de (6.38) s'annule aux points a et b. Aussi ne faut-il s'assurer que la solution est bornée en ces points que pour le dernier terme uniquement. La condition $A = B + 2D = 0$ annule le terme en question. Nous obtenons finalement

$$P(t_0) = \frac{2}{\pi}\sqrt{(t-a)(b-t)}\int_a^b \frac{f(t)\,dt}{(t-t_0)\sqrt{(t-a)(b-t)}}. \qquad (6.39)$$

Considérons le cas où l'étampe est délimitée par une parabole $\tau(t) = kt^2$. Par raison de symétrie, les points a et b seront situés à une même distance l de l'axe y. Supposons tout d'abord que le contact avec le demi-plan est réalisé suivant l'arc $(-l, l)$ tout entier. Dans ce cas

$$\Phi(z) = \frac{4k\mu}{\pi(\varkappa+1)}\frac{1}{\sqrt{l^2-z^2}}\int_{-l}^{l} \frac{t\sqrt{l^2-t^2}}{t-z}\,dt + \frac{P_0}{2\pi\sqrt{l^2-z^2}}. \qquad (6.40)$$

Pour calculer l'intégrale servons-nous de la formule *) (1.61), ch. I :

$$\int_{-l}^{l} \frac{t\sqrt{l^2-t^2}}{t-z}\,dt = \pi i\left(z\sqrt{l^2-z^2} + iz^2 - \frac{il^2}{2}\right).$$

*) On s'est servi des représentations asymptotiques pour de grands $|z|$: $z\sqrt{l^2-z^2} = -iz^2 + \frac{il^2}{2} + O\left(\frac{1}{z}\right)$.

L'expression de la contrainte est alors

$$P(t) = \frac{(l^2 - 2t^2)}{\sqrt{l^2 - t^2}} + \frac{P_0}{\pi\sqrt{l^2 - t^2}}. \qquad (6.41)$$

La condition $P(t) \geqslant 0$ $(-l \leqslant t \leqslant l)$ conduit à la restriction suivante : $P_0 \geqslant 4\pi\mu k l^2/(\varkappa + 1)$. Dans le cas contraire l'étampe n'entre pas entièrement en contact avec le demi-plan élastique. Désignant par a' et b' les points extrêmes de l'arc de contact $(a' = -b' = l')$, remplaçant dans (6.41) l par l' et exigeant que $P(a') = P(b') = 0$, on obtient d'emblée la réponse :

$$l' = \frac{\sqrt{P_0(\varkappa + 1)}}{\sqrt{4\pi\mu k}}. \qquad (6.42)$$

De (6.41) en tenant compte de (6.42) on obtient l'expression de la pression

$$P(t) = \frac{8\mu k}{\varkappa + 1}\sqrt{l'^2 - t^2}. \qquad (6.43)$$

§ 7. Problèmes relatifs aux corps présentant des coupures (cas général)

Nous allons traiter le cas de corps élastiques présentant des coupures dont les frontières sont des contours ouverts L_j $(j = 1, 2, \ldots$ $\ldots, m)$. Désignons les extrémités de ces contours par a_k et b_k (définissant ainsi la direction positive de a_k à b_k et les bords gauche $(+)$ et droit $(-)$ des coupures). Sur les bords des coupures nous supposerons données les contraintes ; ce cas présente le plus d'intérêt pour les applications. Admettons que le vecteur résultant des efforts s'exerçant sur chaque coupure s'annule (s'il n'en est pas ainsi, on effectuera une transformation adéquate des conditions aux limites (cf. § 2)). Pour la position des conditions aux limites, que nous noterons $f^+(t^+)$ et $f^-(t^-)$ afin de distinguer les points de mêmes coordonnées, mais situés de différents côtés de la coupure, nous utiliserons provisoirement les intégrales (2.9).

De la sorte, le problème de l'élasticité relatif à un corps présentant des coupures (pour plus de simplicité nous considérerons un corps illimité) se ramène à la détermination dans le plan de la variable complexe z des fonctions $\varphi(z)$ et $\psi(z)$, analytiques partout à l'exception des coupures et vérifiant les conditions

$$\varphi^+(t^+) + t\overline{\varphi^{+\prime}(t^+)} + \overline{\psi^+(t^+)} = f^+(t^+) + c_j \quad (t \in L_j), \qquad (7.1)$$

$$\varphi^-(t^-) + t\overline{\varphi^{-\prime}(t^-)} + \overline{\psi^-(t^-)} = f^-(t^-) + c_j. \qquad (7.2)$$

Les constantes c_j ne sont pas connues au départ (sauf l'une, qui peut être supposée donnée comme en général pour les domaines multiplement connexes), mais tirées au cours de la résolution du problème de la condition d'univocité des déplacements. Simplifions préliminairement le problème, admettant que $f^+(t^+) = f^-(t^-)$. Il faut pour cela introduire dans tout le plan les fonctions

$$\varphi_0(z) = 0, \quad \psi_0(z) = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_j} \frac{f^-(t) - f^+(t)}{t - z}\, dt$$

et passer aux nouvelles fonctions $\varphi^*(z) = \varphi(z) - \varphi_0(z)$ et $\psi^*(z) = \psi(z) - \psi_0(z)$. Pour ces nouvelles fonctions les conditions aux limites se représentent sous la forme

$$\varphi^+(t) + t\overline{\varphi^{+\prime}(t)} + \overline{\psi^+(t)} = \varphi^-(t) + t\overline{\varphi^{-\prime}(t)} + \overline{\psi^-(t)} = f(t) + c_j \quad (7.3)$$

$$\left(\frac{1}{2}\,[f^+(t) + f^-(t)] = f(t)\right), \quad t \in L_j.$$

Pour la déduction de l'équation singulière correspondant au problème posé nous allons nous servir de la fonction auxiliaire $\omega(t)$ introduite au § 4.

Introduisons sur les contours L_j les fonctions auxiliaires ω_j définies par

$$\omega_j(t) = \varkappa\varphi^+(t) - t\overline{\varphi^{+\prime}(t)} - \overline{\psi^+(t)} - \\ - \varkappa\varphi^-(t) + t\overline{\varphi^{-\prime}(t)} + \overline{\psi^-(t)} \quad (t \in L_j). \quad (7.4)$$

Ces fonctions représentant (au facteur 2μ près) le saut des déplacements, elles doivent s'annuler aux extrémités des coupures.

Par substitution directe, moyennant la formule de Sokhotski-Plémelj (1.14), ch. I, nous nous assurons que les fonctions

$$\varphi(z) = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{(1+\varkappa)} \int_{L_j} \frac{\omega_j(t)}{t - z}\, dt, \quad (7.5)$$

$$\psi(z) = -\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{(1+\varkappa)} \int_{L_j} \frac{\overline{\omega_j(t)} + \bar{t}\omega_j'(t)}{t - z}\, dt \quad (7.6)$$

vérifient identiquement le premier groupe d'égalités (7.3) exprimant la condition de continuité du vecteur des contraintes. Le deuxième groupe de ces conditions, définies déjà par les contraintes mêmes sur les coupures, conduit au système suivant d'équations

intégrales singulières :

$$\sum_{j=1}^{m}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{L_j}\frac{\omega_j(t)}{t-t_0}\,dt+\frac{1}{2\pi i}\int_{L_j}\omega_j(t)\,d\ln\frac{\bar t-\bar t_0}{t-t_0}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2\pi i}\int_{L_j}\overline{\omega_j(t)}\,d\frac{\bar t-\bar t_0}{t-t_0}\right\}=(1+\varkappa)[f_j(t_0)+c_j]\qquad(7.7)$$

$$(t_0\in L_j).$$

Pour construire ces équations on a appliqué la formule d'intégration par parties avec la condition $\omega_j(a_j)=\omega_j(b_j)=0$. Comme on s'intéresse uniquement aux solutions bornées aux extrémités de l'équation (7.7), l'indice de l'équation sera égal à $-m$. Or, ceci signifie que l'équation n'est résoluble que lorsqu'est vérifiée la condition (3.14), ch. I, traduisant l'orthogonalité du second membre à toutes les fonctions propres de l'équation associée (qui deviennent infinies aux extrémités) et ceci conduit aux conditions qu'il faut imposer aux constantes c_j. On obtient pour les constantes complexes c_j un système de $2m$ équations réelles. En vertu de l'unicité de la solution des problèmes de l'élasticité, ce système est résoluble dans la classe de fonctions considérées et l'équation intégrale le sera aussi, d'où il découle que le problème posé est résoluble.

Remarquons que si les coupures sont disposées sur une même droite, choisie, naturellement, comme axe réel, l'équation (7.7) se simplifie beaucoup et prend la forme

$$\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{2\pi i}\int_{L_j}\frac{\omega_j(t)}{t-t_0}\,dt=(1+\varkappa)f_j(t_0)+c_j.\qquad(7.8)$$

On utilise souvent une équation qui s'obtient de l'équation (7.8) par différentiation [82]. Dans le second membre de l'équation figurent déjà les contraintes :

$$\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{2\pi i}\int_{L_j}\frac{\omega_j'(t)}{t-t_0}\,dt=(1+\varkappa)f_j'(t_0)\quad(t_0\in L_j).\qquad(7.8')$$

L'essentiel est que maintenant la fonction inconnue admettra une singularité aux extrémités des coupures. L'indice de l'équation sera égal à m et la solution contiendra des constantes devant être déterminées à partir de la condition d'univocité des déplacements. La structure de la fonction caractéristique ainsi que l'expression

des fonctions propres (8.26), ch. III, pour un angle 2π impliquent que la singularité soit de l'ordre de 1/2.

Aucunes difficultés de principe n'apparaissent lorsque le domaine élastique présentant des coupures n'occupe pas tout le plan. Soit un contour L délimitant de l'extérieur ou de l'intérieur le corps considéré. Introduisons sur les coupures (qui sont supposées n'émergeant pas sur le contour L) les fonctions auxiliaires ω_j, définies de la même façon qu'auparavant, et passons aux nouvelles fonctions

$$\varphi_0(z) = \varphi(z) - \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{2\pi i(1+\varkappa)} \int_{L_j} \frac{\omega_j(t)}{t-z}\, dt,$$

$$\psi_0(z) = \psi(z) + \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{2\pi i(1+\varkappa)} \int_{L_j} \frac{\overline{\omega_j(t)} + \bar{t}\omega_j'(t)}{t-z}\, dt.$$

On peut montrer que les fonctions $\varphi_0(z)$ et $\psi_0(z)$ sont analytiques dans tout le domaine continu que nous désignerons par D. Résolvant alors d'une façon quelconque le problème obtenu (pour des fonctions ω_j conventionnellement données), nous parvenons aux représentations

$$\varphi_0(z) = H_1(\omega_j, z), \quad \psi_0(z) = H_2(\omega_j, z).$$

Revenant de nouveau aux conditions sur les coupures, nous obtenons des équations différant des équations (7.7) ou (7.8) uniquement par des termes réguliers. Exposons un autre procédé de construction des équations intégrales pour des corps présentant des coupures. Le cas général de coupures curvilignes est envisagé dans [101]. Pour plus de simplicité bornons-nous au cas de coupures rectilignes [129].

Soit dans un plan élastique la coupure $|x| < l$, $y > 0$; les contraintes à l'infini sont absentes. Représentons les conditions aux limites sous la forme

$$\sigma_y^{\pm}(x, 0) - i\tau_{xy}^{\pm}(x, 0) = p(x) \pm q(x), \quad |x| < l, \tag{7.9}$$

où

$$p(x) = \frac{1}{2}(\sigma_y^+ + \sigma_y^-) - \frac{i}{2}(\tau_{xy}^+ + \tau_{xy}^-),$$

$$q(x) = \frac{1}{2}(\sigma_y^+ - \sigma_y^-) - \frac{i}{2}(\tau_{xy}^+ - \tau_{xy}^-).$$

Considérons tout d'abord le problème auxiliaire. Supposons que sur le segment $|x| < l$ le vecteur contraintes et les dérivées par rapport à x du vecteur déplacements subissent une disconti-

nuité, le saut des déplacements s'annulant aux extrémités de la coupure :

$$\sigma_y^+ - \sigma_y^- - i(\tau_{xy}^+ - \tau_{xy}^-) = 2q(x); \tag{7.10}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}[u^+ - u^- + i(v^+ - v^-)] = \frac{i(\varkappa + 1)}{2\mu} g'(x). \tag{7.11}$$

Nous allons résoudre ce problème par la méthode de conjugaison (§ 6), par analogie avec le cas où l'on donne sur les bords de la coupure des contraintes. Au lieu de la fonction $\Psi(z)$ nous introduisons la fonction $\Omega(z)$ par la même formule (6.29) pour arriver, en utilisant la formule (6.8), aux conditions aux limites suivantes pour les fonctions $\Phi(z)$ et $\Omega(z)$:

$$\begin{gathered}\Phi^+(x) - \Omega^-(x) - \Phi^-(x) - \Omega^+(x) = 2q(x), \\ \varkappa\Phi^+(x) + \Omega^-(x) - \varkappa\Phi^-(x) + \Omega^+(x) = i(\varkappa + 1)g'(x).\end{gathered} \tag{7.12}$$

Ajoutant les deux formules (7.12) nous parvenons d'emblée au problème de Riemann pour la fonction $\Phi(x)$

$$\Phi^+(x) - \Phi^-(x) = i\left[g'(x) - i\frac{2q(x)}{\varkappa + 1}\right] = i\,Q(x). \tag{7.13}$$

Retranchant la seconde équation (7.12) de la première (multipliée préalablement par $\varkappa$) nous aboutissons au problème pour la fonction $\Omega(x)$

$$\Omega^+(x) - \Omega^-(x) = i[Q(x) + 2iq(x)]. \tag{7.14}$$

Nous obtenons en définitive les représentations des fonctions $\Phi(z)$ et $\Omega(z)$ sous la forme

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-l}^{l} \frac{Q(t)}{t - z}\,dt, \tag{7.15}$$

$$\Omega(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-l}^{l} \frac{Q(t) + 2iq(t)}{t - z}\,dt. \tag{7.16}$$

Donnons également l'expression de $\Psi(z)$

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-l}^{l}\left[\frac{\overline{Q(t)} - 2i\overline{q(t)}}{t - z} - \frac{tQ(t)}{(t - z)^2}\right] dt. \tag{7.17}$$

Les représentations obtenues nous permettront d'établir l'équation intégrale singulière de notre problème. Nous supposerons dans ce cas que les conditions en contraintes sont connues, alors que la dérivée du saut des déplacements est à déterminer.

L'équation singulière cherchée sera

$$\int_{-l}^{l} \frac{Q(t) + iq(t)}{t - x}\, dt = \pi p(x), \quad |x| < l. \tag{7.18}$$

Pour assurer l'unicité des déplacements la solution de (7.18) doit vérifier la condition

$$\int_{-l}^{l} g'(t)\, dt = 0. \tag{7.19}$$

On trouve

$$g'(x) = -i\,\frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1}\, q(x) + \frac{1}{\pi\sqrt{l^2 - x^2}}\left[-\int_{-l}^{l} \frac{\sqrt{l^2 - t^2}\,p(t)}{t - x}\, dt + iR\right], \tag{7.20}$$

où

$$R = \frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1}\int_{-l}^{l} q(t)\, dt.$$

Les fonctions $\Phi(z)$ et $\Omega(z)$ auront alors pour expression

$$\begin{gathered}\Phi(z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{z^2 - l^2}}\int_{-l}^{l} \frac{\sqrt{l^2 - t^2}\,p(t)\,dt}{t - z} + \frac{1}{2\pi i}\left[\int_{-l}^{l} \frac{q(t)\,dt}{t - z} + \frac{R}{\sqrt{z^2 - l^2}}\right],\\ \Omega(z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{z^2 - l^2}}\int_{-l}^{l} \frac{\sqrt{l^2 - t^2}\,p(t)\,dt}{t - z} + \frac{1}{2\pi i}\left[-\int_{-l}^{l} \frac{q(t)\,dt}{t - z} + \frac{R}{\sqrt{z^2 - l^2}}\right].\end{gathered} \tag{7.21}$$

Ainsi, nous avons résolu le problème relatif à une coupure unique. Soit maintenant un système de N coupures orientées arbitrairement de longueur $2l_k$ (fig. 34); leurs centres (de coordonnées x_k^0 et y_k^0) seront notés O_k. Nous introduisons pour chaque coupure un repère local d'origine au point O_k, dirigeant les axes x_k suivant les coupures. Sur les bords des coupures s'exercent les contraintes

$$\sigma_k^{\pm} - i\tau_k^{\pm} = p_k(x_k) \pm q_k(x_k), \quad |x_k| < l_k \quad (k = 1, 2, \ldots, N).$$

Nous commençons par déterminer les contraintes dans un plan illimité présentant une seule coupure $[-l, l]$. En vertu de l'exposé précédent, les potentiels dans le repère $x_kO_ky_k$ sont de la forme

$$\Phi(z_k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-l_k}^{l_k}\frac{Q_k(t)\,dt}{t - z_k},$$

$$\Psi(z_k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-l}^{l}\left[\frac{\overline{Q_k(t)} - 2i\overline{q_k(t)}}{t - z_k} - \frac{tQ_k(t)}{(t - z_k)^2}\right], \tag{7.22}$$

Fig. 34. Système de coupures.

où

$$z_k = x_k + iy_k; \quad Q_k(x) = g_k'(x) - i\frac{2q_k(x)}{\varkappa + 1}.$$

Par superposition nous parvenons aux représentations

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{N}\int_{-l_k}^{l_k}\frac{Q_k(t)\,dt}{t - z_k},$$

$$\Psi(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{N} e^{-2i\alpha_k}\int_{-l_k}^{l_k}\left[\frac{\overline{Q_k(t)} - 2i\overline{q_k(t)}}{t - z_k} - \frac{\bar{T}_k e^{i\alpha_k}}{(t - z_k)^2}Q_k(t)\right]dt, \tag{7.23}$$

où

$$T_k = te^{i\alpha_k} + z_k^0; \quad z_k = e^{-i\alpha_k}(z - z_k^0)$$

qui décrivent l'état de contrainte du plan connaissant sur toutes les N coupures les sauts de déplacements $g_k(x_k)$ et de contraintes $q_k(x_k)$.

Servons-nous des expressions (7.23) pour construire les systèmes d'équations singulières dans le cas où sur les bords des coupures sont données les contraintes. Pour les sauts de contraintes nous avons les représentations (7.23), tandis que les autres conditions

concernant les contraintes seront prises sous la forme

$$\sigma_n^+ + \sigma_n^- - i(\tau_n^+ + \tau_n^-) = 2p_n(x_n), \quad |x_n| < l_n \quad (n = 1, 2, \ldots, N). \tag{7.24}$$

Ecrivons les fonctions $\Phi_n(z_n)$ et $\Psi_n(z_n)$ dans le repère $x_nO_ny_n$ utilisant les formules de transformation de coordonnées :

$$\Phi_n(z_n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{N} \int_{-l_k}^{l_k} \frac{Q_k(t)dt}{t - z_k},$$

$$\Psi_n(z_n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{N} e^{2i\alpha_{nk}} \int_{-l_k}^{l_k} \left[\frac{\overline{Q_k(t)} - 2i\overline{q_k(t)}}{t - z_k} - \frac{(\bar{T}_k - \bar{z}_n^0)\, e^{i\alpha_k}}{(t - z_k)^2} Q_k(t) \right] dt, \tag{7.25}$$

où

$$z_k = e^{-i\alpha_k}(z_n e^{i\alpha_n} + z_n^0 - z_k^0), \quad \alpha_{nk} = \alpha_n - \alpha_k.$$

Définissant les contraintes sur l'axe x_n et les portant dans les conditions (7.24) nous arrivons à un système de N équations singulières

$$\sum_{k=1}^{N} \int_{-l_k}^{l_k} \left[Q_k(t) K_{nk}(t, x) + \overline{Q_k(x)} L_{nk}(t, x) + \right.$$
$$\left. + \frac{iq_k(t)}{\bar{T}_k - \bar{X}_n} e^{i(\alpha_k - 2\alpha_n)} \right] dt = \pi p_n(x), \quad |x| < L_n \quad (n = 1, 2, \ldots, N). \tag{7.26}$$

Ici

$$K_{nk}(t, x) = \frac{e^{i\alpha_k}}{2} \left(\frac{1}{T_k - X_n} + \frac{e^{-2i\alpha_n}}{\bar{T}_k - \bar{X}_n} \right),$$

$$L_{nk}(t, x) = \frac{e^{-i\alpha_k}}{2} \left[\frac{1}{\bar{T}_k - \bar{X}_n} - \frac{T_k - X_n}{(\bar{T}_k - \bar{X}_n)^2} e^{-2i\alpha_n} \right],$$

où

$$X_n = xe^{i\alpha_n} + z_n^0.$$

Dans le cas où les contraintes sont les mêmes sur les deux côtés des coupures, le second membre des équations (7.26) devient plus simple car $q_k(t) = 0$. On a alors

$$\int_{-l_n}^{l_n} \frac{g_n'(t)\,dt}{t - x} + \sum_{k \neq n} \int_{-l_k}^{l_k} \left[g_k'(t) K_{nk}(t, x) + \overline{g_k'(t)} L_{nk}(t, x) \right] dt =$$
$$= \pi p_n(x), \quad |x| < l_n \quad (n = 1, 2, \ldots, N). \tag{7.27}$$

Notons que dans le cas de coupures colinéaires le système d'équations (7.26) se simplifie et prend la forme

$$\sum_{k=1}^{N}\int_{-l_k}^{l_k}\frac{R_k(t)\,dt}{t-x+x_k^0-x_n^0}=\pi p_n(x),$$

$$|x|<l_n \quad (n=1,2,\ldots,N), \qquad (7.28)$$

où

$$R_k(x)=g_k'(x)+i\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}q_k(x).$$

Lorsque les coupures sont suffisamment éloignées l'une de l'autre, le système obtenu d'équations intégrales peut être résolu par la méthode du petit paramètre (par approximations successives) [101].

Nous allons le résoudre par la méthode de quadratures mécaniques. Ramenons préalablement tous les intervalles d'intégration à un même intervalle [−1, 1]. Pour cela effectuons le changement de variables

$$t=l_n\tau;\quad x=l_n\xi\quad (|\tau|<l_n,\quad |x|<l_n). \qquad (7.29)$$

Le système (7.27) en combinaison avec les conditions (7.19) prend alors la forme

$$\int_{-1}^{1}\frac{g_n'(\tau)\,d\tau}{\tau-\xi}+\sum_{k\neq n}l_k\int_{-1}^{1}[g_k'(\tau)K_{nk}(l_k\tau,\,l_n\xi)+$$

$$+\overline{g_k'(\tau)}L_{nk}(l_k\tau,\,l_n\xi)]d\tau=\pi p_n(\xi),\quad |\xi|<1\quad (n=1,2,\ldots,N), \qquad (7.30)$$

$$\int_{-1}^{1}\overline{g_n'(\tau)}d\tau=0\quad (n=1,2,\ldots,N).$$

A l'aide de la méthode numérique de résolution des équations intégrales singulières exposée au § 3 du chapitre I, ramenons le problème à un système algébrique

$$\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\sum_{k=1}^{N}l_k[u_k(t_m)K_{nk}(l_kt_m,\,l_nx_r)+$$

$$+\overline{u_k(t_m)}L_{nk}(l_kt_m,\,l_nx_r)]=p_n(x_r), \qquad (7.31)$$

$$\sum_{m=1}^{M}u_n(t_m)=0\quad (n=1,2,\ldots,N;\quad r=1,2,\ldots,M-1),$$

où

$$g_n'(\xi)=\frac{u_n(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}}.$$

Pour déterminer les points t_m et x_r on s'est servi des formules (30.21), (30.22) du chapitre I.

Considérons à titre d'exemple le cas de deux coupures colinéaires (fig. 35). Le chargement se ramenait aux contraintes σ_y^∞ à l'infini. Les calculs ont été effectués dans les 20 points de chaque coupure. Sur la figure 35 sont reportées les valeurs de la charge critique (définie conformément à la théorie de la rupture fragile) pour différentes dispositions réciproques des coupures caractérisées par les paramètres $\varepsilon_1 = \frac{d_1}{2l}$ et $\varepsilon_2 = \frac{d_2}{2l}$. Les courbes pleines se rapportent à la pointe droite de la coupure inférieure, les courbes en pointillé, à la pointe gauche.

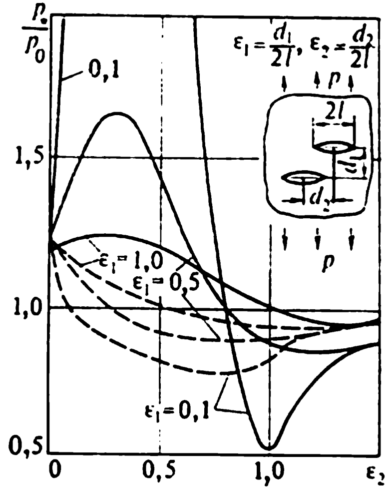


Fig. 35. Plan présentant deux coupures colinéaires et valeurs de la charge critique.

Attirons l'attention sur une méthode efficace de calcul des coefficients d'intensité des contraintes décrite dans [65]. Les auteurs utilisent des applications conformes de la forme

$$\omega(\zeta) = \frac{\zeta^2}{a_{n-1}(\zeta - ic)^n} \sum_{k=0}^{n-1} a_k \zeta^k, \tag{7.32}$$

généralisation de la représentation (1.81), ch. I. Pour certains rapports des paramètres on obtient les applications sur le demi-plan des domaines du type d'un demi-plan à cavité cunéiforme (fig. 36) (pour $n = 3$, $a_0 = -3c^2$, $a_1 = -9ic$, $a_2 = 8$). La solution des problèmes pour de tels domaines s'obtient sous forme explicite (cf. § 5). La valeur du coefficient d'intensité des contraintes calculée d'après cette méthode dans le problème de traction d'un tel plan est proche de la valeur trouvée à l'aide d'équations intégrales singulières pour un demi-plan présentant une coupure verticale [101]. Nous reviendrons sur la question de la détermination des coefficients d'intensité des contraintes au § 6 du chapitre VII.

Remarquons que les équations de ce paragraphe peuvent être utilisées pour la résolution des problèmes de flexion des plaques en présence de coupures. Toutefois la position rigoureuse de tels problèmes se trouve en contradiction avec les idées principales qui sont à la base de la théorie de flexion des plaques, puisque les problèmes de ce genre sont au fond des problèmes spatiaux et

qu'on ne peut parler de l'exactitude de la solution qu'à une certaine distance des points d'extrémités seulement.

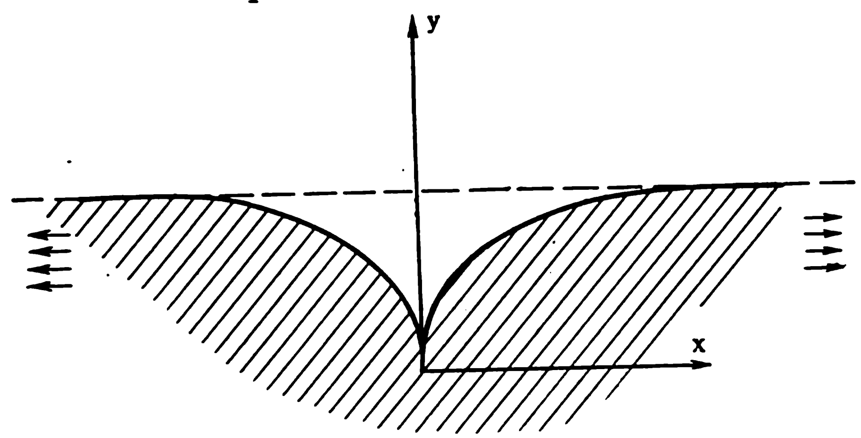


Fig. 36. Domaine donné par (7.32) appliqué dans le demi-plan.

§ 8. Méthode des solutions fonctionnellement invariantes

Nous appliquerons l'appareil des fonctions de la variable complexe à la construction d'une classe spéciale de solutions des problèmes de l'élasticité dynamique. Cette classe de solutions peut être obtenue à l'aide des solutions dites *solutions fonctionnellement invariantes* de l'équation d'onde.

Celles-ci se construisent de la façon suivante : on cherche une fonction $\Omega(x, y, t)$ telle qu'une fonction arbitraire $u = f(\Omega)$ deux fois différentiable *) soit solution de l'équation

$$\Box u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \tag{8.1}$$

autrement dit

$$f''(\Omega)\left[\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Omega}{\partial y}\right)^2 - \frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial t}\right)^2\right] + \\ + f'(\Omega)\left[\frac{\partial^2\Omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Omega}{\partial y^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\Omega}{\partial t^2}\right] = 0. \tag{8.1'}$$

D'où, $f(\Omega)$ étant arbitraire, nous obtenons

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2\Omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Omega}{\partial y^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\Omega}{\partial t^2}, \\ \left(\frac{\partial\Omega}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Omega}{\partial y}\right)^2 = \frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial t}\right)^2.\end{gathered} \tag{8.2}$$

*) Si $\Omega(x, y, t)$ est une fonction complexe, alors $f(\Omega)$ est une fonction analytique.

La vérification du système (8.2) est une condition nécessaire et suffisante pour que $u = f(\Omega)$ soit solution de l'équation d'onde. Une vérification immédiate démontre la légitimité de l'énoncé suivant : l'expression de l'intégrale générale du système (8.2) est linéaire par rapport à x, y et t :

$$\delta = l(\Omega)t + m(\Omega)x + n(\Omega)y - k(\Omega) = 0\,; \tag{8.3}$$

les coefficients y sont liés par la relation

$$l^2(\Omega) = a^2[m^2(\Omega) + n^2(\Omega)]. \tag{8.4}$$

En effet, calculant les dérivées de la fonction donnée implicitement, portant les expressions obtenues dans (8.2) et compte tenu de (8.4) nous nous convaincons que l'expression (8.3) est l'intégrale du système (8.2). On a ainsi démontré que l'équation d'onde (8.1) admet des solutions de classe indiquée. Notons que si $f(\Omega)$ est une fonction complexe, les fonctions $u = \operatorname{Re} f(\Omega)$ et $u = \operatorname{Im} f(\Omega)$ seront également solutions de (8.1).

Rapportons ici la liste des dérivées de la fonction $f(\Omega)$ par rapport à x, y, t, dont nous aurons besoin dans la suite :

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''\left(-\frac{m}{\delta'}\right)^2 + \frac{f'}{\delta'}\frac{\partial}{\partial\Omega}\left(\frac{m^2}{\delta'}\right) = \frac{1}{\delta'}\frac{\partial}{\partial\Omega}\left(f'\frac{m^2}{\delta'}\right),\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{\delta'}\frac{\partial}{\partial\Omega}\left(f'\frac{n^2}{\delta'}\right),\quad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{1}{\delta'}\frac{\partial}{\partial\Omega}\left(f'\frac{l^2}{\delta'}\right),\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial t} = \frac{1}{\delta'}\frac{\partial}{\partial\Omega}\left(f'\frac{nl}{\delta'}\right),\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial t} = \frac{1}{\delta'}\frac{\partial}{\partial\Omega}\left(f'\frac{ml}{\delta'}\right),\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{1}{\delta'}\frac{\partial}{\partial\Omega}\left(f'\frac{mn}{\delta'}\right)
\end{gathered} \tag{8.5}$$

(le cran désigne la dérivée par rapport à Ω).

Rappelons que nous avons imposé à la solution $u = f(\Omega)$ de l'équation d'onde certaines conditions de différentiabilité par rapport à Ω. En effet, si pour x, y, t réels la fonction $\Omega(x, y, t)$ prend dans le plan de la variable complexe $z = x + iy$ les valeurs dans un certain domaine, on doit supposer la fonction $f(\Omega)$ analytique dans ce domaine. Comme on sait, cette hypothèse recèle sous forme implicite l'équation de Laplace pour les parties réelle et imaginaire de la fonction f. La solution $u = f(x + iy)$ peut servir d'exemple de ce genre. Si, par contre, la fonction $f(\Omega)$ est fonction d'un seul paramètre réel, c'est-à-dire prend ses valeurs sur une courbe, la condition d'analyticité n'est plus nécessaire et pour que $f(\Omega)$ soit solution de (8.1) au sens classique du terme, il suffit qu'elle soit deux fois continûment différentiable le long de

cette courbe. Les ondes $u = f(x \pm at)$ représentent un exemple de ce genre.

Notons également que la classe des solutions fonctionnellement invariantes de l'équation d'onde se définit, comme nous l'avons montré, par la structure de la fonction $\Omega(x, y, t)$ vérifiant le système (8.2) et prenant par conséquent la forme (8.3) sous la condition (8.4). Les fonctions $f(\Omega)$ peuvent être, comme on a indiqué plus haut, des fonctions arbitraires deux fois différentiables (ou bien analytiques). L'appellation même de la méthode des solutions fonctionnellement invariantes reflète certaines propriétés générales de groupe des solutions de l'équation d'onde.

1. Ondes planes. La solution admet la forme la plus simple si l'on pose l, m, n constantes et si l'on prend la fonction $k(\Omega)$ égale à Ω. Dans ce cas (8.3) devient

$$\Omega = lt + mx + ny, \tag{8.6}$$

où $l^2 = a^2(m^2 + n^2)$, et l'expression générique des solutions de l'équation d'onde est de la forme

$$u = f(lt + mx + ny). \tag{8.7}$$

Si tous les nombres l, m, n sont réels, nous obtenons alors la solution de l'équation d'onde dite *onde plane*. Les coefficients l, m, n peuvent être des nombres complexes. Pour $m = 1$, $n = \pm i$, $l = 0$ nous obtenons l'intégrale générale de l'équation de Laplace qui vérifie bien sûr l'équation d'onde aussi. Dans le cas où tous les trois coefficients sont différents de zéro et sont des grandeurs complexes d'arguments différents, nous obtenons une solution foncièrement nouvelle, dite *onde plane complexe* [144].

Sans restreindre la généralité on peut poser dans (8.7) le coefficient $l = 1$. Notant $m = -\theta$, nous obtenons $n = \pm\sqrt{a^{-2} - \theta^2}$, par conséquent, l'expression (8.7) prend la forme

$$u = f(t - \theta x \pm y\sqrt{a^{-2} - \theta^2}). \tag{8.8}$$

Si (8.8) vérifie l'équation de Laplace, alors les parties réelles et imaginaires

$$u = \operatorname{Re} f(t - \theta x \pm y\sqrt{a^{-2} - \theta^2}),$$
$$u = \operatorname{Im} f(t - \theta x \pm y\sqrt{a^{-2} - \theta^2})$$

sont également solutions de l'équation (8.1).

Considérons à titre d'exemple les problèmes sur la réflexion des ondes planes par la frontière $y = 0$ du demi-plan élastique $y \geqslant 0$. Appelons *onde plane longitudinale* la solution des équations

$$\Delta\Phi = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}, \qquad \text{(5.54) ch. III}$$

$$\Delta\Psi = \frac{1}{b^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}, \qquad \text{(5.55) ch. III}$$

pour laquelle

$$\Psi(x, y, t) = 0,$$
$$\Phi = f(t - \theta x \pm y\sqrt{a^{-2} - \theta^2}). \tag{8.9}$$

Fig. 37. Onde incidente sur la frontière.

Pour le demi-plan $y > 0$, le siège d'oscillations élastiques engendrées par une onde plane longitudinale, la solution de la forme (fig. 37)

$$\Phi = f(t - \theta x + y\sqrt{a^{-2} - \theta^2}), \quad \Psi = 0, \tag{8.10}$$

est l'onde dirigée vers la frontière (incidente) ; θ est évidemment un nombre réel, $|\theta| < a^{-1}$, $\sqrt{a^{-2} - \theta^2} \neq 0$, puisque réels sont les coefficients de la fonction $\Omega(x, y, t)$. La solution

$$\Phi = f(t - \theta x - y\sqrt{a^{-2} - \theta^2}), \quad \Psi = 0, \tag{8.11}$$

est l'onde réfléchie par la frontière.

Nous appellerons *onde plane transversale* la solution suivante des équations (1.56), (1.57), ch. III :

$$\Phi = 0, \ \Psi = f(t - \theta x \pm y\sqrt{b^{-2} - \theta^2}), \tag{8.12}$$

où les coefficients θ et $\sqrt{b^{-2} - \theta^2}$ sont également réels. Nous distinguerons les ondes transversales allant vers la frontière du demi-plan $y = 0$ pour lesquelles

$$\Phi = 0, \quad \Psi = f(t - \theta x + y\sqrt{b^{-2} - \theta^2}), \tag{8.13}$$

et les ondes réfléchies par la frontière pour lesquelles

$$\Phi = 0, \quad \Psi = f(t - \theta x - y\sqrt{b^{-2} - \theta^2}). \tag{8.14}$$

Dans les ondes dirigées vers la frontière le potentiel garde une valeur constante sur les plans

$$t - \theta x + y\sqrt{a^{-2} - \theta^2} = \text{const (onde longitudinale)}, \tag{8.14'}$$
$$t - \theta x + y\sqrt{b^{-2} - \theta^2} = \text{const (onde transversale)} \tag{8.14''}$$

qui avec l'accroissement de t se déplacent dans la direction N formant un angle obtus avec l'axe y. Les cosinus directeurs de la normale N sont

$$\cos(N, x) = \theta a, \quad \cos(N, y) = -\sqrt{1 - \theta^2 a^2} \quad \text{(onde longitudinale)},$$
$$\cos(N, x) = \theta b, \quad \cos(N, y) = -\sqrt{1 - \theta^2 b^2} \quad \text{(onde transversale)}. \tag{8.15}$$

Pour les ondes réfléchies, les cosinus directeurs de la normale N_1 aux fronts d'onde sont

$$\cos(N_1, x) = \theta a, \quad \cos(N_1, y) = \sqrt{1 - \theta^2 a^2} \text{ (onde longitudinale)},$$

$$\cos(N_1, x) = \theta b, \quad \cos(N_1, y) = \sqrt{1 - \theta^2 b^2} \text{ (onde transversale)}, \tag{8.16}$$

et la normale forme un angle aigu avec l'axe y (fig. 38).

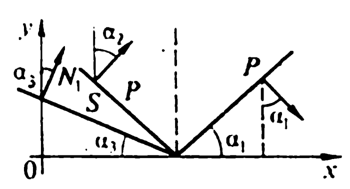


Fig. 38. Onde incidente longitudinale et ondes réfléchies (S, onde transversale. P, onde longitudinale).

Supposons que la frontière du demi-plan est libre de contraintes. Dans ce cas pour $y = 0$ nous avons

$$\tau_{xy} = \rho b^2 \left[2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \, \partial y} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \right] = 0,$$

$$\sigma_y = \rho \left[a^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + (a^2 - 2b^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - 2b^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \, \partial y} \right] = 0. \tag{8.17}$$

Par substitution directe il est facile de s'assurer que séparément ni l'onde se propageant vers la frontière, ni l'onde réfléchie ne vérifient les conditions aux limites. Rien de plus naturel que de rechercher la solution du problème sous forme d'une somme d'ondes de différents types, ce qui est légitime du fait de la linéarité des équations de la dynamique du corps élastique. Notons en outre que les conditions initiales sont prises en considération par le choix de la direction de propagation de l'onde.

Supposons tout d'abord que vers la frontière $y = 0$ se dirige une onde plane longitudinale décrite par les potentiels du type (8.10) ; nous l'affectons d'indice « 1 ». Nous rechercherons les ondes réfléchies sous forme d'une somme d'ondes longitudinale et transversale :

$$\Phi_2 = Af(t - \theta x - y\sqrt{a^{-2} - \theta^2}),$$

$$\Psi_2 = Bf(t - \theta x - y\sqrt{b^{-2} - \theta^2}). \tag{8.18}$$

Ici A et B sont des constantes inconnues appelées ***amplitudes d'ondes*** ou ***coefficients de réflexion***. Ces constantes sont à déterminer à partir des conditions (8.17) dans lesquelles on porte les expressions de $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$ et de $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 = \Psi_2$. On obtient

$$[(1 - 2\theta^2 b^2)(1 + A) - 2\theta b^2 B\sqrt{b^{-2} - \theta^2}] f''(t - \theta x) = 0,$$

$$[-2\theta(1 - A)\sqrt{a^{-2} - \theta^2} + (b^{-2} - 2\theta^2) B] f''(t - \theta x) = 0. \tag{8.19}$$

Comme f est une fonction arbitraire, les expressions entre crochets sont nulles, par suite :

$$A = \frac{1}{R(\theta)}[-(2\theta^2 - b^{-2})^2 + 4\theta^2\sqrt{a^{-2} - \theta^2}\sqrt{b^{-2} - \theta^2}],$$

$$B = \frac{1}{R(\theta)}[-4\theta(2\theta^2 - b^{-2})\sqrt{a^{-2} - \theta^2}], \tag{8.20}$$

où

$$R(\theta) = (2\theta^2 - b^{-2}) + 4\theta^2\sqrt{a^{-2} - \theta^2}\sqrt{b^{-2} - \theta^2} > 0.$$

A l'aide de (8.18) et (8.19) nous trouvons finalement les expressions cherchées des potentiels des ondes réfléchies. Dans nos raisonnements nous avons supposé que les ondes réfléchies par la frontière libre du demi-plan étaient décrites par la même fonction $f(\Omega)$ que l'onde incidente. Plus précisément, $f(\Omega)$ décrit son profil. On déduit de (8.20) qu'il existe des ondes réfléchies de même profil. Si l'on place l'observateur (l'appareil) en un certain point (x, y) du demi-plan par lequel passeront aux instants correspondants du temps t_{1p}, t_{2p}, t_{2s} l'onde incidente longitudinale et les ondes réfléchies longitudinale et transversale respectivement, celui-ci enregistrera une variation dans le temps de la perturbation (du déplacement, de la déformation ou de la contrainte) dans chacune de ces ondes suivant la loi $f(t)$; pour les ondes réfléchies se manifeste l'influence des amplitudes A et B qui interviennent dans le facteur d'échelle suivant l'axe des ordonnées sur le graphique $f = f(t)$. La fonction $f(t)$ peut encore être appelée oscillogramme théorique de perturbation ou d'onde.

Notons aussi quelques conséquences géométriques des formules des potentiels des ondes incidente et réfléchie. Appelant *angle d'incidence* d'une onde sur la frontière l'angle α_1 que fait la normale à la surface

$$t - \theta x + y\sqrt{a^{-2} - \theta^2} = \text{const}$$

(qui pour un choix adéquat de la constante du second membre peut être appelée *front d'onde* à l'instant t) avec le sens négatif de l'axe y et *angles de réflexion* les angles α_2 et α_3 que font les normales aux surfaces

$$t - \theta x - y\sqrt{a^{-2} - \theta^2} = \text{const}, \quad t - \theta x - y\sqrt{b^2 - \theta^2} = \text{const}$$

avec le sens positif de l'axe y, nous tirons des formules obtenues pour les potentiels : 1° $\alpha_1 = \alpha_3$, c'est-à-dire que l'angle d'incidence d'une onde longitudinale est égal à l'angle de réflexion, et 2° $\sin\alpha_1/\sin\alpha_3 = a/b$, c'est-à-dire que le rapport du sinus de l'angle d'incidence d'une onde longitudinale au sinus de l'angle de réflexion d'une onde transversale est égal au rapport des vitesses de propagation de ces ondes. On déduit des formules (8.16) que $\theta = (\sin\alpha_1)/a$.

Considérons maintenant une onde plane transversale, incidente sur la frontière $y = 0$. Ce problème ne présente pas de difficultés nouvelles en comparaison du précédent lorsque $|\theta| < a^{-1}$ et se résout de façon analogue. L'onde incidente se décrit par les potentiels

$$\Phi_1 = 0, \quad \Psi_1 = f(t - \theta x + y\sqrt{b^{-2} - \theta^2}). \tag{8.21}$$

Pour $|\theta| < a^{-1}$, la solution pour des ondes réfléchies peut être recherchée sous la forme

$$\begin{aligned} \Phi_2 &= Cf(t - \theta x - y\sqrt{a^{-2} - \theta^2}), \\ \Psi_2 &= Df(t - \theta x - y\sqrt{b^{-2} - \theta^2}), \end{aligned} \tag{8.22}$$

où C, D sont des constantes interprétées comme coefficients de réflexion (amplitudes d'ondes réfléchies).

Portant $\Phi = \Phi_2$, $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$ dans (8.17), nous trouvons

$$\begin{aligned} &[(1 - 2\theta^2 b^2)C + 2\theta b^2(1 - D)\sqrt{b^{-2} - \theta^2}]f''(t - \theta x) = 0, \\ &[2\theta C\sqrt{a^{-2} - \theta^2} + (1 + D)(b^{-2} - 2\theta^2)]f''(t - \theta x) = 0. \end{aligned} \tag{8.23}$$

D'où, supposant $f''(t) \neq 0$, nous avons

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{R(\theta)}[4\theta(2\theta^2 - b^{-2})\sqrt{b^{-2} - \theta^2}], \\ D &= \frac{1}{R(\theta)}[-(2\theta^2 - b^{-2})^2 + 4\theta^2\sqrt{b^{-2} - \theta^2}\sqrt{a^{-2} - \theta^2}]. \end{aligned} \tag{8.24}$$

Voyons à quoi est liée la restriction $|\theta| < a^{-1}$ dans la description du processus de réflexion d'ondes transversales. Formellement cette restriction provient du fait que les coefficients figurant dans l'expression de $\Omega(x, y, t)$ sont réels, ce qui est nécessaire pour l'onde plane élémentaire (8.7). Du point de vue physique, $|\theta| = |\theta_0| = a^{-1}$ est l'angle d'incidence d'onde plane transversale pour lequel a lieu la réflexion interne totale. Des formules (8.15) nous déduisons le lien qui existe entre l'angle d'incidence α_1 de l'onde transversale plane sur la frontière $y = 0$ et θ_0 (admettant pour plus de précision que la direction de propagation de l'onde fait un angle aigu avec le sens positif de l'axe x et, par conséquent, $\theta > 0$) :

$$\sin\alpha_1 = \theta_0 b = \frac{b}{a}. \tag{8.25}$$

Nous référant à la figure 39 nous remarquons que (8.25) définit la valeur de l'angle α_1 pour laquelle la vitesse de propagation des ondes transversales le long de la frontière (dans le temps Δt l'onde se déplacera suivant la normale au front d'onde d'une distance de $b\ \Delta t$) est égale à la vitesse des ondes longitudinales (on voit de la figure 39 qu'au cours du même laps de temps Δt l'onde longitu-

dinale parcourt le chemin $a\ \Delta t$). Pour des angles d'incidence $\alpha_1 >$ arc sin (b/a) il y aura réflexion interne totale des ondes transversales, et les perturbations longitudinales produites aux points de la surface $y = 0$ par une onde transversale dépasseront l'onde transversale. Cette propriété se prête à l'interprétation suivante : « le sinus de l'angle de réflexion d'une onde longitudinale calculé d'après la loi de sinus $\sin \alpha_2 = \theta a$ s'avère supérieur à l'unité, de sorte qu'il n'y a pas, au sens usuel du terme, d'angle de réflexion réel de l'onde longitudinale ». Donc, la solution du problème de réflexion donnée par les formules (8.22), (8.24) n'a de sens que pour $|\theta| < a^{-1}$, c'est-à-dire pour des angles d'incidence inférieurs à l'angle de réflexion interne totale : $\sin \alpha_1 < b/a$ (fig. 40).

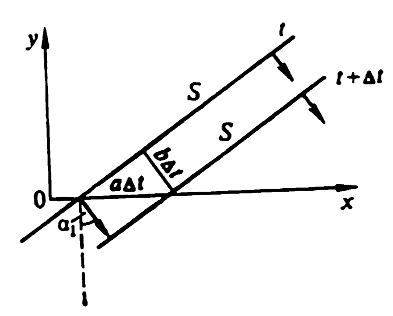


Fig. 39. Passage au cas de la réflexion interne totale.

Considérons maintenant le cas de réflexion interne totale. Gardant la restriction $|\theta| < a^{-1}$, nous pouvons néanmoins chercher la solution sous la forme d'une somme d'ondes planes, mais il faut lever la condition exigeant que les coefficients de l'expression de $\Omega(x, y, t)$ figurant dans (9.9) soient réels, puisque pour $|\theta| < a^{-1}$ les coefficients de l'onde plane longitudinale peuvent devenir complexes. On peut établir la résolubilité du problème suivant dans le cas de $|\theta| > a^{-1}$: trouver pour une onde incidente transversale donnée par (8.21) des ondes réfléchies longitudinales et transversales, à déplacements limités, telles que les perturbations globales vérifient les conditions aux limites posées. La condition de résolubilité du problème est que le vecteur $w = \text{grad}\ \Phi_2$ soit borné ou, ce qui revient au même, que soit bornée $f'(x)$.

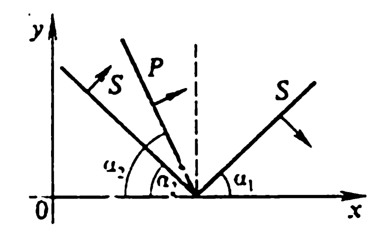


Fig. 40. Réflexion d'ondes transversales.

Envisageons deux cas auxiliaires qui aideront à construire la solution générale du problème de réflexion. Soit dans (8.21) la fonction $f = f_1$ une fonction complexe représentant les valeurs sur l'axe réel d'une certaine fonction de variable complexe, régulière dans le demi-plan $y > 0$ et y admettant une dérivée bornée. Nous chercherons la solution du problème sous la forme

$$\begin{aligned} \Phi_2 &= C_1 f_1(t - \theta x + iy\sqrt{\theta^2 - a^{-2}}), \\ \Psi_2 &= D_1 f_1(t - \theta x - y\sqrt{b^{-2} - \theta^2}), \end{aligned} \tag{8.26}$$

les constantes C_1, D_1 se déterminent des conditions aux limites homogènes (8.17). Comparant (8.22) et (8.26), il est facile de remarquer que C_1 et D_1 s'obtiennent à partir de C et D de (8.24) par simple substitution au radical $\sqrt{a^{-2} - \theta^2}$ du radical $-i\sqrt{\theta^2 - a^{-2}}$.

On peut considérer exactement de la même façon le deuxième cas, où $f = f_2$ représente la valeur limite d'une fonction analytique dans le demi-plan $y < 0$. Les ondes réfléchies se décrivent alors à l'aide des potentiels

$$\begin{aligned} \Phi_2 &= C_2 f_2(t - \theta x - iy\sqrt{\theta^2 - a^{-2}}), \\ \Psi_2 &= D_2 f_2(t - \theta x - y\sqrt{b^2 - \theta^2}), \end{aligned} \tag{8.27}$$

et pour obtenir C_2 et D_2 il convient également de remplacer dans (8.24) le radical $\sqrt{a^{-2} - \theta^2}$ par $i\sqrt{\theta^2 - a^{-2}}$.

Les solutions auxiliaires (8.26) et (8.27) permettent de donner une réponse dans le cas général. Les raisonnements s'appuient sur le fait qu'une fonction $f(x)$ de variable réelle, admettant une dérivée seconde continue vérifiant l'inégalité

$$|x^2 f''(x)| < M,$$

peut être présentée sous la forme

$$f(x) = \frac{1}{2}[f_1(x) + f_2(x)], \tag{8.28}$$

où $f_1(x)$ est la valeur limite d'une fonction de variable complexe, définie et analytique dans le demi-plan $y > 0$ et y admettant une dérivée première bornée, alors que $f_2(x)$ est la valeur limite d'une fonction analytique dans le demi-plan $y < 0$ et y admettant une dérivée première bornée *). Les conditions imposées à $f(x)$ impliquent que sont bornées les fonctions $f_1'(x)$ et $f_2'(x)$, dérivées des valeurs limites des fonctions analytiques mentionnées. Dans la solution générale du problème concernant la réflexion d'une onde transversale

$$\Phi_1 = 0, \quad \Psi_1 = f(t - \theta x + y\sqrt{b^{-2} - \theta^2}),$$

où f est une fonction arbitraire pour $b^{-1} > \theta > a^{-1}$, décomposons Ψ_1 en deux termes à l'aide de (8.28)

$$\Psi_1 = \frac{1}{2}\Big[f_1(t - \theta x + y\sqrt{b^{-2} - \theta^2}) + \\ + f_2(t - \theta x + y\sqrt{b^{-2} - \theta^2})\Big] \tag{8.29}$$

*) Qu'il en est ainsi découle de la construction des fonctions analytiques pour $y > 0$ et $y < 0$ d'après leurs parties réelles, identiques sur $y = 0$ et égales à $f(x)$. Du principe de symétrie de Schwarz (cf. [88]) ressort que $f_1(x)$ et $f_2(x)$ sont des fonctions conjuguées.

et résolvons le problème pour chacun des termes séparément. Nous obtiendrons des formules décrivant le champ global des ondes incidente et réfléchies :

$$\Phi = \frac{1}{2}[C_1f_1(t - \theta x + iy\sqrt{\theta^2 - a^{-2}}) + \\ + C_2f_2(t - \theta x - iy\sqrt{\theta^2 - a^{-2}})], \quad (8.30)$$

$$\Psi = \frac{1}{2}[f_1(t - \theta x + y\sqrt{b^{-2} - \theta^2}) + f_2(t - \theta x + y\sqrt{b^{-2} - \theta^2})] + \\ + \frac{1}{2}[D_1f_1(t - \theta x - y\sqrt{b^{-2} - \theta^2}) + \\ + D_2f_2(t - \theta x - y\sqrt{b^{-2} - \theta^2})]. \quad (8.31)$$

Les constantes D_1 et D_2 ainsi que C_1 et C_2 étant conjuguées complexes, le résultat tiré de (8.30) et (8.31) peut également s'écrire sous la forme

$$\Phi = \mathrm{Re}\{C_1f_1(t - \theta x + iy\sqrt{\theta^2 - a^{-2}})\},$$

$$\Psi = \mathrm{Re}\{f_1(t - \theta x + y\sqrt{b^{-2} - \theta^2}) + \\ + D_1f_1(t - \theta x - y\sqrt{b^{-2} - \theta^2})\}. \quad (8.32)$$

On rencontre souvent dans les applications la fonction

$$f_1(t - \theta x + y\sqrt{b^{-2} - \theta^2}) = Ae^{i\omega(t - \theta x + y\sqrt{b^{-2} - \theta^2})} \quad (8.33)$$

ou bien

$$f(t - \theta x + y\sqrt{b^{-2} - \theta^2}) = A \cos \omega(t - \theta x + y\sqrt{b^{-2} - \theta^2}).$$

C'est le cas des ***oscillations stationnaires*** (de fréquence ω) ; A est l'amplitude, $\Omega(x, y, t) = t - \theta x + y\sqrt{b^{-2} - \theta^2}$, la phase. Dans ce cas le potentiel de l'onde réfléchie transversale s'écrit :

$$\Psi_2 = \mathrm{Re}\{D_1Ae^{i\omega(t - \theta x - y\sqrt{b^{-2} - \theta^2})}\}. \quad (8.34)$$

Mais le coefficient D_1 de l'onde réfléchie transversale est en module égal à l'unité (cf. (8.24), où D est égal à D_1 si l'on remplace $\sqrt{a^{-2} - \theta^2}$ par $-i\sqrt{a^{-2} - \theta^2}$) de sorte que l'amplitude des ondes réfléchies est égale à celle de l'onde incidente. Les énergies de l'une et de l'autre sont, par conséquent, les mêmes, ce qui justifie le terme de réflexion interne totale. Calculant le potentiel de l'onde réfléchie longitudinale nous obtenons

$$\Phi = e^{-\omega y\sqrt{\theta^2 - a^{-2}}}\,\mathrm{Re}\{C_1e^{i\omega(t - \theta x)} \quad (8.35)$$

i.e. les oscillations longitudinales s'amortiront avec l'accroissement de y (lorsqu'on s'éloigne de la frontière du demi-plan).

Supposons maintenant que les perturbations longitudinale et transversale sont des ondes complexes et que la frontière est libre de contraintes. Choisissant pour les potentiels des fonctions complexes telles que leur dérivée s'annule à l'infini, nous obtenons des solutions dans lesquelles les déplacements tendent vers zéro à l'infini. Pour cette raison les ondes de ce type sont dites *ondes de surface.*

Admettons que le potentiel longitudinal Φ se donne par la formule

$$\Phi = f_1(t - \theta x + i\sqrt{\theta^2 - a^{-2}}y), \tag{8.36}$$

où θ est un nombre réel, $|\theta| > b^{-1}$, f_1 une fonction de variable complexe qui représente la valeur limite d'une fonction analytique dans le demi-plan $y > 0$, avec $|f_1'| < M$.

Nous chercherons le potentiel Ψ sous la forme

$$\Psi = Af_1(t - \theta x + i\sqrt{\theta^2 - b^{-2}}y). \tag{8.37}$$

Portant ces expressions dans les conditions (8.17), nous obtenons

$$\begin{aligned} &[(1 - 2b^2\theta^2) + 2ib^2\theta\sqrt{\theta^2 - b^{-2}}A]\, f''(t - \theta x) = 0, \\ &[-2i\theta\sqrt{\theta^2 - a^{-2}} + (b^{-2} - 2\theta^2)A]\, f''(t - \theta x) = 0. \end{aligned} \tag{8.38}$$

Ce système admet une solution différente de zéro lorsque son déterminant s'annule :

$$\Delta = b^2[(2\theta^2 - b^{-2})^2 - 4\theta^2\sqrt{\theta^2 - a^{-2}}\sqrt{\theta^2 - b^{-2}}] = 0. \tag{8.39}$$

L'équation (8.39) s'appelle *équation de Rayleigh.* On montre [144] que cette équation possède une racine réelle positive située dans l'intervalle $b^{-1} < \theta < \infty$ et une racine négative de même valeur absolue. Désignons la racine positive par c^{-1} et portons celle-ci dans toutes les expressions à la place de θ. Rapportons les résultats définitifs

$$\begin{aligned} \Phi &= f_1\left(t \mp \frac{x}{c} + i\sqrt{c^{-2} - a^{-2}}\, y\right), \\ \Psi &= Af_1\left(t \mp \frac{x}{c} + i\sqrt{c^{-2} - b^{-2}}\, y\right), \end{aligned} \tag{8.40}$$

où

$$A = \mp 2ic^{-1}\sqrt{c^{-2} - a^{-2}}(2c^{-2} - b^{-2})^{-1} = \\ = (2c^{-2} - b^{-2})(\pm 2ic^{-1}\sqrt{c^{-2} - b^{-2}})^{-1}.$$

De même pour la fonction f_2 considérée comme la valeur limite d'une fonction analytique dans le demi-plan $y < 0$:

$$\begin{aligned} \Phi &= f_2\left(t \mp \frac{x}{c} - i\sqrt{c^{-2} - a^{-2}}\, y\right), \\ \Psi &= Bf_2\left(t \mp \frac{x}{c} - i\sqrt{c^{-2} - b^{-2}}\, y\right), \end{aligned} \tag{8.41}$$

où

$$B = \pm 2ic^{-1}\sqrt{c^{-2} - a^{-2}}(2c^{-2} - b^{-2})^{-1} = \\ = (2c^{-2} - b^{-2})(\mp 2ic^{-1}\sqrt{c^{-2} - b^{-2}})^{-1}.$$

Si les fonctions f_1 et f_2 sont conjuguées, la demi-somme des solutions correspondantes est alors la fonction réelle cherchée :

$$\begin{aligned} \Phi &= \operatorname{Re}\left\{f_1\left(t \mp \frac{x}{c} + i\sqrt{c^{-2} - a^{-2}}\, y\right)\right\}, \\ \Psi &= \operatorname{Re}\left\{Af_1\left(t \mp \frac{x}{c} + i\sqrt{c^{-2} - b^{-2}}\, y\right)\right\}. \end{aligned} \tag{8.42}$$

Les ondes de ce type sont dites *ondes de Rayleigh* qui a découvert leur existence.

Il apparaît des formules (8.42) que toute l'image du mouvement se déplace le long de l'axe x à une vitesse c, tout en restant figée dans un repère concomitant ; c s'appelle *vitesse de Rayleigh.*

2. Solutions homogènes. Etudions le cas où la fonction $k(\Omega)$ de l'équation (8.3) est identiquement nulle. Si $l(\Omega) \neq 0$, alors divisant les deux membres de (8.3) par $l(\Omega)$ et notant $m(\Omega)/l(\Omega) = -\theta$ nous obtenons $n^2(\Omega)/l^2(\Omega) = a^{-2} - \theta^2$, et l'équation (8.3) peut être écrite sous la forme

$$t - \theta x + \sqrt{a^{-2} - \theta^2}\, y = 0. \tag{8.43}$$

Donc au lieu de $f(\Omega)$ il faut maintenant écrire $f(\theta)$.

L'équation (8.43) se récrit sous la forme

$$1 - \theta\xi + \sqrt{a^{-2} - \theta^2}\, \eta = 0 \quad \left(\xi = \frac{x}{t}, \quad \eta = \frac{y}{t}\right). \tag{8.44}$$

Par conséquent, θ est une fonction de deux arguments seulement : ξ et η. Dans ce cas les solutions $f(\theta)$ de l'équation (8.1) seront des fonctions des arguments ξ, η, donc des fonctions homogènes de t, x et y de dimension zéro. Comme on sait [141], les fonctions homogènes de dimension s par rapport aux variables t, x, y se définissent par la relation

$$u(kt, kx, ky) = k^s u(t, x, y).$$

Les solutions correspondantes de l'équation d'onde seront dites *solutions homogènes de dimension s*. Ainsi donc, toute fonction $f(\theta)$ deux fois différentiable (analytique, si elle est complexe) est solution de dimension zéro de l'équation d'onde (8.1) lorsque θ est solution de (8.43). Inversement, on montre [144] que chaque solution homogène de dimension zéro de l'équation d'onde peut s'écrire sous la forme $u = f(\theta)$, où θ est solution de l'équation (8.43).

Etudions plus en détail l'équation (8.44). Faisons passer dans le plan complexe de θ une coupure le long de l'axe réel $(-a^{-1}, a^{-1})$ et fixons une branche du radical $\sqrt{a^{-2} - \theta^2}$ par la condition $\sqrt{a^{-2} - \theta^2} > 0$ pour $\theta = ib$, où $b > 0$. Résolvant l'équation (8.44) par rapport à θ nous trouvons

$$\theta = \frac{\xi - i\eta\sqrt{1 - a^{-2}(\xi^2 + \eta^2)}}{\xi^2 + \eta^2}. \tag{8.45}$$

Dans cette expression il convient de prendre, compte tenu de la branche choisie du radical $\sqrt{a^{-2} - \theta^2}$, sa valeur arithmétique $[1 - a^{-2}(\xi^2 + \eta^2)]^{1/2}$. Sous cette condition l'équation (8.44) applique l'intérieur du disque $\xi^2 + \eta^2 \leqslant a^2$ sur le plan θ coupé le long de $(-a^{-1}, a^{-1})$. Les parties supérieure ($\eta > 0$) et inférieure ($\eta < 0$) de l'intérieur du disque $\xi^2 + \eta^2 \leqslant a^2$ s'appliquent respectivement sur le demi-plan inférieur et supérieur de θ. Le point $\xi = \eta = 0$ a pour image le point à l'infini sur le plan θ, et les segments

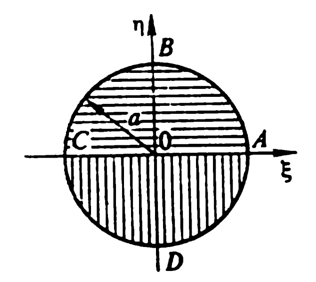


Fig. 41. Domaine de variation des variables similaires.

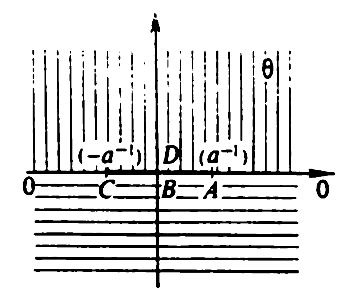


Fig. 42. Points du plan complexe θ présentant une coupure.

$\eta = 0$, $0 < \xi < a$ et $\eta = 0$, $-a < \xi < 0$ s'appliquent respectivement sur les demi-axes réels $\theta > a^{-1}$ et $\theta < a^{-1}$. Le cercle $\xi^2 + \eta^2 = a^2$ a pour image la coupure $(-a^{-1}, a^{-1})$. La correspondance des points du disque $\xi^2 + \eta^2 \leqslant a^2$ et du plan θ est montrée sur les figures 41 et 42.

Soit $f(\theta)$ une fonction analytique univoque sur le plan θ coupé le long de $(-a^{-1}, a^{-1})$. Choisissons la solution de l'équa-

tion (8.1) sous la forme $u = \operatorname{Re} f(\theta)$. Cette solution est définie à l'intérieur du disque $\xi^2 + \eta^2 < a^2$. Montrons qu'on peut la prolonger de façon continue sur $\xi^2 + \eta^2 > a^2$. En effet, considérons à nouveau l'équation (8.36). Pour $\xi^2 + \eta^2 > a^2$ sa solution s'écrit

$$\theta = \frac{\xi \pm \eta\sqrt{a^{-2}(\xi^2+\eta^2)-1}}{\xi^2+\eta^2}. \tag{8.46}$$

On voit que θ admet des valeurs réelles pour $\xi^2 + \eta^2 > a^2$. Pour $\theta = \text{const}$ l'équation (8.46) est celle d'une tangente au cercle $\xi^2 + \eta^2 = a^2$. Le point de tangence partage la tangente en deux demi-tangentes : I, dirigée dans le sens antihoraire (son équation est l'équation (8.46) avec le signe « + » devant le radical) et II, dirigée dans le sens des aiguilles d'une montre (l'équation (8.46) avec le signe « — »). Ces demi-tangentes sont représentées respectivement sur les figures 43 et 44. Dans l'hypothèse que θ garde sur celles-ci des valeurs constantes (égales aux valeurs en les points de tangence correspondants), l'extérieur du disque $\xi^2 + \eta^2 > a^2$ s'applique bijectivement sur le segment $(-a^{-1}, a^{-1})$ du plan θ (puisque chaque demi-tangente, I ou II, s'applique en le point correspondant de cette coupure). Ainsi donc, on peut prolonger la solution par continuité au-delà de la frontière $\xi^2 + \eta^2 = a^2$ sur l'extérieur du disque $\xi^2 + \eta^2 > a^2$, en conservant la valeur de la solution $u = \operatorname{Re} f(\theta)$ constante le long des demi-tangentes I ou II. Bien plus, si l'on décompose la solution $u = \operatorname{Re} f(\theta)$ en deux

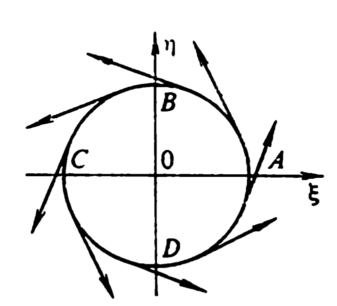


Fig. 43. Demi-tangentes dirigées dans le sens antihoraire.

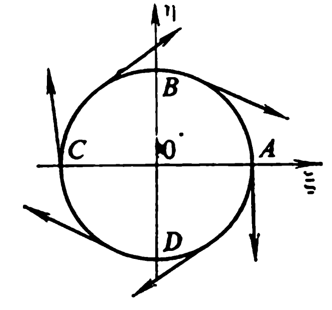


Fig. 44. Demi-tangentes dirigées dans le sens horaire.

termes réels : $u = u_1(\theta) + u_2(\theta)$, $u_1(\theta)$ étant le prolongement le long des demi-tangentes I et $u_2(\theta)$, celui le long des demi-tangentes II, on obtient alors une nouvelle solution réelle de l'équation (8.1), prolongée de façon continue sur l'extérieur du disque à travers sa frontière. On peut donc prolonger la solution d'une infinité de façons différentes tout en conservant sa continuité à la traversée du cercle. Dans les problèmes concrets le procédé de prolongement est suggéré par le mouvement du front d'onde.

L'analyse précédente se rapporte au cas où la solution est recherchée dans tout l'espace. Considérons maintenant le demi-espace $y \geqslant 0$. A l'intérieur du demi-disque $\xi^2 + \eta^2 \leqslant a^2$, $\eta \geqslant 0$ nous prenons la solution de l'équation (8.1) sous la forme $u = \mathrm{Re}\, f(\theta)$. Cette solution s'annule sur un arc AB du demi-cercle (fig. 45). Dans nombre de cas il s'avère plus commode d'obtenir le prolongement univoque de la solution en utilisant les demi-tangentes au cercle I (pour $\xi < 0$) et II (pour $\xi > 0$). On voit qu'en dehors du domaine $A_1ABB_1OA_1$ la solution est identiquement nulle.

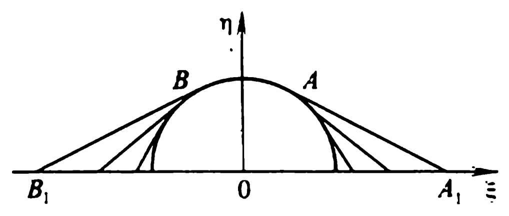


Fig. 45. Domaine de l'état perturbé (en variables ξ et η).

Les équations (8.43) et (8.36) peuvent être posées non pas par rapport à θ mais par rapport à une autre variable complexe z liée à θ par une relation fonctionnelle. Indiquons une relation commode de ce genre. Soit

$$\theta = \frac{1}{2a}\left(z + \frac{1}{z}\right). \tag{8.47}$$

Dans ce cas le plan θ à coupure $(-a^{-1}, a^{-1})$ se transforme en un disque $|z| \leqslant 1$. Avec un tel choix de la branche du radical on a l'égalité

$$\sqrt{a^{-2} - \theta^2} = \frac{i}{2a}\left(z - \frac{1}{z}\right). \tag{8.48}$$

(8.36) s'écrira alors

$$1 - \frac{1}{2a}\left(z + \frac{1}{z}\right)\xi + \frac{i}{2a}\left(z - \frac{1}{z}\right)\eta = 0$$

ou bien

$$1 - \frac{z}{2a}(\xi - i\eta) - \frac{1}{2az}(\xi + i\eta) = 0. \tag{8.49}$$

Récrivons (8.49) dans un repère polaire :

$$\rho e^{-i\varphi} z^2 - 2za + \rho e^{i\varphi} = 0.$$

La solution évidente de cette équation est $z = re^{i\varphi}$, où r se détermine de l'équation quadratique et est égal à

$$r = \frac{\rho}{a + \sqrt{a^2 - \rho^2}}.$$

Ainsi, à chaque point du disque $\xi^2 + \eta^2 \leqslant a^2$ correspond un point du disque unité dans le plan z. Les formules (8.47), (8.49) sont particulièrement commodes pour la considération des problèmes dynamiques relatifs à des domaines en forme de coins.

Notons qu'à la traversée du cercle $\xi^2 + \eta^2 = a^2$, les solutions qui sont elles-mêmes continues peuvent admettre des discontinuités de leurs dérivées normales. Bien plus, quoique à l'intérieur du disque $\xi^2 + \eta^2 < a^2$ ces solutions soient continues avec toutes leurs dérivées ($f(\theta)$ étant analytique), en dehors du disque non seulement les dérivées, mais aussi les solutions peuvent subir des sauts, même infinis. Ce fait est facile à comprendre si l'on remarque que les cercles

$$\left(\frac{x}{t}\right)^2 + \left(\frac{y}{t}\right)^2 = a^2 \quad (\text{i.e. } \xi^2 + \eta^2 = a^2)$$

et les tangentes à ceux-ci

$$t - \theta x + \sqrt{a^{-2} - \theta^2}\,y = 0 \quad (\theta = \text{const}, \ -a^{-1} < \theta < a^{-1})$$

sont les sections des surfaces caractéristiques par des plans $t = \text{const}$ dans l'espace x, y, t. Rappelons que les surfaces caractéristiques de l'équation d'onde bidimensionnelle dans l'espace x, y, t sont des cônes d'axes parallèles à l'axe t et les plans qui leur sont tangents (cf. par exemple [152]).

Les principales idées d'application de la théorie des fonctions de la variable complexe à la résolution de l'équation d'onde (8.1) que nous avons exposées sont largement utilisées dans les problèmes de propagation des oscillations, lorsque l'on a à résoudre une équation d'onde ou un système d'équations d'onde.

§ 9. Problème dynamique similaire à symétrie axiale pour le demi-espace avec des conditions aux limites mobiles mixtes

Nous allons exposer une classe de problèmes dynamiques similaires aux conditions aux limites mixtes relatifs au demi-espace *) [98]. Il sera supposé que sur toute la surface $z = 0$ sont réalisées les conditions suivantes

$$\tau_{z\varphi}(r, 0, t) = \tau_{rz}(r, 0, t) = 0 \qquad (9.1)$$

et qu'en outre sur une partie de la frontière sont données les contraintes $\sigma_z(r/t)$ et sur l'autre les vitesses $v_z(r/t)$. La courbe de séparation des conditions aux limites est un cercle se déplaçant à une vitesse constante v. Dans ce cas le problème est similaire et à symétrie axiale, les contraintes et les vitesses s'avèrent être des fonctions homogènes de dimension zéro.

Pour résoudre le problème à symétrie axiale formulé nous utilisons les formules (5.66), ch. III, établissant le lien entre les solutions des problèmes à symétrie axiale et des problèmes plans.

*) Avec des conditions d'un certain type le problème s'avère équivalent au problème concernant l'élargissement dans l'espace d'une coupure circulaire.

Puisque les contraintes et les vitesses sont homogènes, nous choisirons la solution plane sous la forme déterminée par la méthode des solutions fonctionnellement invariantes.

Il découle de ce qui vient d'être dit que la solution peut être recherchée sous la forme

$$
\begin{aligned}
v_{(k)r}(r, z, t) &= \operatorname{Re} \int_{-\pi}^{\pi} V_{(k)x}(\theta_k) \cos \varphi \, d\varphi, \\
v_{(k)z}(r, z, t) &= \operatorname{Re} \int_{-\pi}^{\pi} V_{(k)z}(\theta_k) \, d\varphi, \\
\tau_{(k)rz}(r, z, t) &= \operatorname{Re} \int_{-\pi}^{\pi} \Sigma_{(k)xz}(\theta_k) \cos \varphi \, d\varphi, \\
\sigma_{(k)z}(r, z, t) &= \operatorname{Re} \int_{-\pi}^{\pi} \Sigma_{(k)z}(\theta_k) \, d\varphi,
\end{aligned}
\tag{9.2}
$$

où l'indice k prend respectivement les valeurs 1 ou 2 pour les composantes longitudinale et transversale des déplacements et pour les contraintes qu'elles déterminent, θ_k est donné par la formule

$$
\theta_k = \frac{a_k t r \cos \varphi + i z \sqrt{a_k^2 t^2 - r^2 \cos^2 \varphi - z^2}}{a_k (r^2 \cos^2 \varphi + z^2)}, \tag{9.3}
$$

qui n'est autre que l'écriture des équations (8.14′) et (8.14″) en coordonnées polaires, où l'on a remplacé d'autre part Y par $-z$ (dans le cas spatial à symétrie axiale le rôle de l'axe Y joue l'axe z avec le signe contraire), a_k ($k = 1, 2$) sont les vitesses des ondes longitudinale et transversale.

Les représentations (9.2) sont déduites du fait que les déplacements et les vitesses dans le problème plan peuvent être représentés à l'aide de fonctions analytiques sous la forme

$$
\begin{aligned}
v_{(k)j}(X, z, t) &= \operatorname{Re} V_{(k)j}(\theta_k), \\
\sigma_{(k)ij}(X, z, t) &= \operatorname{Re} \Sigma_{(k)ij}(\theta_k).
\end{aligned}
\tag{9.4}
$$

Les fonctions introduites plus haut sont analytiques dans le demi-plan $z > 0$ ($\operatorname{Im} \theta_k > 0$). Prolongeons-les dans le demi-plan inférieur $z < 0$ ($\operatorname{Im} \theta_k < 0$) de la manière suivante :

$$
\overline{V_{(k)j}(\theta_k)} = V_{(k)j}(\bar{\theta}_k), \quad \overline{\Sigma_{(k)ij}(\theta_k)} = \Sigma_{(k)ij}(\bar{\theta}_k). \tag{9.5}
$$

La condition de nullité des contraintes tangentielles (9.1) implique

$$
\tau_{Xz}(X, 0, t) = 0. \tag{9.6}
$$

Suivant [55], rapportons les relations entre les fonctions analytiques introduites plus haut sur le plan $z = 0$. Remarquons que dans ce cas $\theta = \theta_1 = \theta_2 = t/x$. Dans nos raisonnements nous utiliserons la condition aux limites (9.6), ainsi que les relations (5.53) et (5.54) du chapitre III et les relations reliant les déformations et les contraintes avec les déplacements. A l'aide de la fonction auxiliaire

$$V_z(\theta) = V_{1z}(\theta) + V_{2z}(\theta), \tag{9.7}$$

les fonctions qui nous intéressent s'expriment de la façon suivante :

$$\begin{aligned} V'_{1x}(\theta) &= \frac{\theta(1 - a_2^2\theta^2)}{\sqrt{a_1^{-3} - \theta^2}} V'_z(\theta), \\ V'_{2x}(\theta) &= -2a_2^2\theta\sqrt{a_2^{-2} - \theta^2}\, V'_z(\theta), \\ V'_{1z}(\theta) &= (1 - 2a_2^2\theta^2) V'_z(\theta), \quad V'_{2z}(\theta) = 2a_2^2\theta^2 V'_z(\theta), \\ \Sigma'_{1xz}(\theta) &= -\Sigma'_{2xz}(\theta) = -2\mu\theta(1 - 2a_2^2\theta^2) V'_z(\theta), \\ \Sigma'_{1z}(\theta) &= -\frac{4\mu a_2^2(\theta^2 - 0{,}5a_2^{-2})^2}{\sqrt{a_1^{-2} - \theta^2}} V'_z(\theta), \\ \Sigma'_{2z}(\theta) &= -4\mu a_2^2\theta^2\sqrt{a_2^{-2} - \theta^2}\, V'_z(\theta), \end{aligned} \tag{9.8}$$

où le cran désigne la différentiation par rapport à l'argument. Les relations (9.2) et (9.8) ne concernent que celles des composantes des vitesses et des contraintes qui figurent dans les conditions aux limites. On tire de (9.8) la relation

$$\Sigma'_z(\theta) = \Sigma_{1z}(\theta) + \Sigma_{2z}(\theta) = -\frac{4\mu a_2^2 R(\theta^2)}{\sqrt{a_1^{-2} - \theta^2}} V'_z(\theta). \tag{9.9}$$

Ici $R(\theta^2)$ est la fonction de Rayleigh (8.39).

Rapportons également les expressions des accélérations $\dot{v}_z(r, z, t)$ et des vitesses des contraintes $\dot{\sigma}_z(r, z, t)$ pour $z = 0$, qu'on tire de (9.2), soient

$$\begin{aligned} \dot{v}_z(r, 0, t) &= \mathrm{Re} \int_{-\pi}^{\pi} V'_z(\theta) \frac{d\varphi}{r\cos\varphi}, \\ \dot{\sigma}_z(r, 0, t) &= \mathrm{Re} \int_{-\pi}^{\pi} \Sigma'_z(\theta) \frac{d\varphi}{r\cos\varphi}. \end{aligned} \tag{9.10}$$

Ici le point désigne la différentiation par rapport au temps. La parité de la fonction $V_z(\theta)$ nous permet de passer au nouvel argument $\nu = \theta^2$. Introduisons la fonction

$$F(\nu) = V_z(\theta). \tag{9.11}$$

Les relations (9.10) s'écrivent alors sous la forme

$$\frac{r}{2}\dot{\sigma}_z(r,0,t) = \mathrm{Re}\int_{l_\nu} \frac{G'(\nu)}{\sqrt{\nu-\nu_0}}\,d\nu,$$
$$\frac{r}{2}\dot{v}_z(r,0,t) = \mathrm{Re}\int_{l_\nu} \frac{F'(\nu)\,d\nu}{\sqrt{\nu-\nu_0}}. \tag{9.12}$$

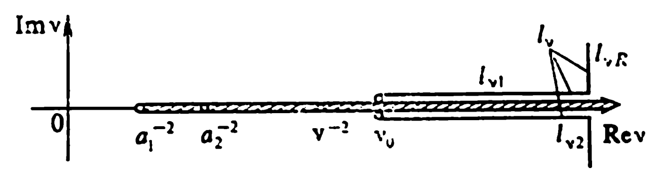


Fig. 46. Contour l_ν.

Ici sont introduites les notations $G(\nu) = \Sigma_z(\theta)$, $\nu_0 = t^2/r^2$, le contour l_ν est montré sur la figure 46. On a

$$G'_\nu = -\frac{4\mu a_2^2}{\sqrt{a_1^{-2}-\nu}}R(\nu)F'(\nu). \tag{9.13}$$

Afin de déterminer d'une façon univoque les radicaux $\sqrt{\nu-\nu_0}$, $\sqrt{a_1^{-2}-\nu}$, $\sqrt{a_2^{-2}-\nu}$, nous allons couper, par la pensée, le plan ν le long du demi-axe réel respectivement à partir des points ν_0, a_1^{-2}, a_2^{-2} jusqu'à l'infini, et nous exigeons que pour $\nu = 0$ le premier radical soit égal à $i\sqrt{\nu_0}$ et le second et le troisième soient positifs.

Pour les vitesses $v_z(r, 0, t)$ et les contraintes $\sigma_z(r, 0, t)$ nous obtenons de (9.2) les expressions

$$v_z(r,0,t) = \sqrt{\nu_0}\,\mathrm{Re}\int_{l_\nu} \frac{F(\nu)\,d\nu}{\nu\sqrt{\nu-\nu_0}},$$
$$\sigma_z(r,0,t) = \sqrt{\nu_0}\,\mathrm{Re}\int_{l_\nu} \frac{G(\nu)\,d\nu}{\nu\sqrt{\nu-\nu_0}}. \tag{9.14}$$

Les conditions initiales nulles seront vérifiées si les fonctions $F(\nu)$ et $G(\nu)$ sont régulières pour $\mathrm{Re}\,\nu < a_1^{-2}$, et le point $\nu = 0$ n'est pas pôle des expressions sous l'intégrale dans (9.14). Aussi admettons-nous

$$F(\nu) = \int^{\nu} F'(\nu)\,d\nu, \quad G(\nu) = \int^{\nu} G'(\nu)\,d\nu. \tag{9.15}$$

L'intégration dans ces formules est étendue aux contours situés du même côté de l'axe réel que le point ν. Les expressions (9.12) à (9.15) obtenues dans [55] servent à déterminer la fonction $F'(\nu)$.

Pour plus de précision, concrétisons la forme des conditions aux limites de la manière suivante. Posons

$$\begin{aligned} \sigma_z(r, 0, t) &= \sigma_z^0\left(\frac{r}{t}\right) \quad (0 \leqslant r < vt), \\ v_z(r, 0, t) &= v_z^0\left(\frac{r}{t}\right) \quad (vt < r < \infty). \end{aligned} \tag{9.16}$$

Il est commode de passer à la variable $\nu_0 = t^2/r^2$ du problème similaire. Introduisons les nouvelles notations

$$\begin{aligned} g(\nu_0) &= \frac{r}{2}\dot{\sigma}_z^0\left(\frac{r}{t}\right) \quad (v^{-2} < \nu_0 < \infty), \\ f(\nu_0) &= \frac{r}{2}\dot{v}_z^0\left(\frac{r}{t}\right) \quad (0 < \nu_0 < v^{-2}). \end{aligned} \tag{9.17}$$

La première des conditions aux limites (9.17) s'écrit

$$g(\nu_0) = -4\mu a_2^2 \operatorname{Re}\left\{\int\limits_{l_{\nu_1}} \frac{R(\nu)F'(\nu)\,d\nu}{\sqrt{a_1^{-2}-\nu}\sqrt{\nu-\nu_0}} + \int\limits_{l_{\nu_2}} \frac{R(\nu)F'(\nu)\,d\nu}{\sqrt{a_1^{-2}-\nu}\sqrt{\nu-\nu_0}} + \int\limits_{l_{\nu_R}} \frac{R(\nu)F'(\nu)\,d\nu}{\sqrt{a_1^{-2}-\nu}\sqrt{\nu-\nu_0}}\right\}, \tag{9.18}$$

où $l_{\nu_1}, l_{\nu_2}, l_{\nu_R}$ sont trois éléments du contour l_ν (cf. fig. 46).

Admettons que pour $\nu \to \infty$

$$F'(\nu) = o(\nu^{-1}). \tag{9.19}$$

En vertu de cette restriction, les contraintes ne peuvent pas être illimitées à l'origine des coordonnées. Alors l'intégrale étendue au contour l_{ν_R} dans (9.18) s'annule. Désignant par $F'_+\nu$ et $F'_-(\nu)$ les valeurs limites de la fonction $F'(\nu)$ d'en haut et d'en bas sur l'axe réel et compte tenu de $R_+(\nu) = R_-(\nu) = R(\nu)$ nous récrivons (9.18) comme

$$g(\nu_0) = 4\mu a_2^2 \int\limits_{\nu_0}^{\infty} \frac{R(\nu)[\operatorname{Im} F'_-(\nu) - \operatorname{Im} F'_+(\nu)]}{\sqrt{\nu - a_1^{-2}}\sqrt{\nu-\nu_0}}\,d\nu. \tag{9.20}$$

Considérant (9.20) comme une équation d'Abel, nous pouvons l'inverser. Il vient

$$\frac{4\mu a_2^2 R(\nu)[\operatorname{Im} F'_-(\nu) - \operatorname{Im} F'_+(\nu)]}{\sqrt{\nu - a_2^{-2}}} = -\frac{1}{\pi}\frac{d}{d\nu}\int_{\nu}^{\infty} \frac{g(\nu_0)\,d\nu_0}{\sqrt{\nu_0 - \nu}} \qquad (9.21)$$

$$(v^{-2} < \nu < \infty, \quad v^{-2} < \nu_0 < \infty).$$

L'intégrale impropre du second membre converge si $g(\nu_0) = o(\nu_0^{-1/2})$, ce qui a toujours lieu sous la condition (9.19).

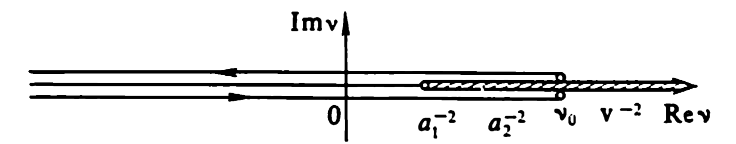


Fig. 47. Contour l_ν après transformation.

Considérons la deuxième condition (9.17). Transformons le contour l_ν comme montré sur la figure 47. Mettant à profit l'analyticité de la fonction $F'(\nu)$ pour $\nu < a_1^{-2}$, on montre que la deuxième condition conduit à la relation

$$f(\nu_0) = \operatorname{Re}\int_{-\infty}^{\nu_0} \frac{F'_-(\nu)\,d\nu}{i\sqrt{\nu_0 - \nu}} + \operatorname{Re}\int_{\nu_0}^{-\infty} \frac{F'_+(\nu)d\nu}{i\sqrt{\nu_0 - \nu}} =$$

$$= \int_{a_1^{-2}}^{\nu_0} \frac{\operatorname{Im} F'_-(\nu) - \operatorname{Im} F'_+(\nu)}{\sqrt{\nu_0 - \nu}}\,d\nu. \qquad (9.22)$$

Inversant cette égalité, on trouve

$$\operatorname{Im} F'_+(\nu) - \operatorname{Im} F'(\nu) = -\frac{1}{\pi}\frac{d}{d\nu}\int_{a_1^{-2}}^{\nu} \frac{f(\nu_0)\,d\nu_0}{\sqrt{\nu - \nu_0}} \qquad (9.23)$$

$$(a_1^{-2} < \nu, \quad \nu_0 < v^{-2}).$$

Sur $-\infty < \nu < a_1^{-2}$ la fonction $F'(\nu)$ est analytique. Aussi a-t-on l'égalité

$$F'_+(\nu) - F'_-(\nu) = 0 \quad (-\infty < \nu < a_1^{-2}). \qquad (9.24)$$

Compte tenu de (10.5),

$$\overline{F'(\nu)} = F'(\bar{\nu}). \qquad (9.25)$$

En vertu de (9.17), (9.19) et (9.24) on peut donc passer au problème de Riemann pour la fonction analytique $F(\nu)$:

$$F^+(\nu) - F^-(\nu) = g(\nu), \tag{9.26}$$

$$g(\nu) = \begin{cases} 0 & (-\infty < \nu < a_1^{-2}), \\ -\dfrac{i}{\pi}\dfrac{d}{d\nu}\displaystyle\int_{a_1^{-2}}^{\nu} \dfrac{f(\nu_0)d\nu_0}{\sqrt{\nu_0 - \nu}} & (a_1^{-2} < \nu < v^{-2}), \\ \dfrac{i\sqrt{\nu - a_1^{-2}}}{4\pi\mu a_2^2 R(\nu)} \dfrac{d}{d\nu}\displaystyle\int_{\nu}^{\infty} \dfrac{g(\nu_0)\,d\nu_0}{\sqrt{\nu_0 - \nu}} & (v^{-2} < \nu < \infty). \end{cases}$$

Nous allons considérer une position plus générale qu'au § 1, ch. I, du problème de Riemann pour le cas de coefficients discontinus, en admettant la présence aux points a_1^{-2}, v^{-2} de singularités du type de la fonction δ. Notons qu'à l'infini il ne peut pas y avoir de singularités en vertu de la condition (9.19). On peut montrer également que l'existence d'un pôle au point a_1^{-2} conduirait à des contraintes illimitées sur le front de l'onde longitudinale, ce cas sera donc exclu de même. La solution générale du problème de Riemann (9.26) peut être présentée sous la forme (A_j sont des constantes)

$$F'(\nu) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a_1^{-2}}^{\infty} \frac{\Phi(\tau)\,d\tau}{\tau - \nu} + \sum_{j=1}^{m} \frac{A_j}{(\nu - v^{-2})^j}; \tag{9.27}$$

on y remarque les termes tenant compte d'une singularité éventuelle au point v^{-2}.

L'intégrale dans (9.27) n'assure pas à elle seule la vérification de la condition (9.19) puisque pour $\nu \to \infty$ elle tend vers zéro comme $1/\nu$. Il faut donc choisir de façon appropriée la constante A_1. L'ordre du pôle m et les autres constantes A_j $(j \neq 1)$ sont trouvés à partir des conditions supplémentaires sur la ligne de changement des conditions aux limites.

Le cas où sur une partie de la frontière $r < vt$ sont données les vitesses $v_z(r, 0, t)$ et sur la partie $vt < r < \infty$, les contraintes $\sigma_z(r, 0, t)$, est considéré d'une manière analogue et conduit à un problème du type (9.26) pour la fonction $G'(\nu)$. Cette situation est caractéristique pour les problèmes dynamiques d'enfoncement d'étampes coniques indéformables dans le demi-espace élastique.

Considérons à titre d'exemple le problème de propagation d'une fissure sous une charge constante. Dans ce cas $g(\nu_0) = f(\nu_0) = 0$,

de sorte que dans (9.27) ne se conserve que la somme $\sum_{j=1}^{m} \frac{A_j}{(\nu - v^{-2})^j}$.
Les considérations suivantes permettront de concrétiser cette somme. Exigeons que la contrainte σ_z croisse comme $\delta^{-1/2}$ ($\delta = |r - vt| \to 0$). La dérivée $\dot{\sigma}_z$ doit alors croître comme $\delta^{-3/2}$, ce qui n'est possible que pour $n = 2$. Ainsi

$$F'(\nu) = \frac{A}{(\nu - v^{-2})^2}. \tag{9.28}$$

Par conséquent,

$$F(\nu) = \frac{v^2 \nu A}{v^{-2} - \nu}. \tag{9.29}$$

Représentons l'expression de la fonction $G(\nu)$ sous une forme modifiée (en transformant le contour d'intégration)

$$G(\nu) = \int_0^{\nu} G'(\nu)\, d\nu = \int_0^{-\infty} G'(\nu)\, d\nu + \int_{\infty\nu}^{\nu} G'(\nu) d\nu =$$

$$= -4\mu a_2^2 \left[\int_0^{-\infty} \frac{R(\nu)}{\sqrt{v^{-2} - \nu}} F'(\nu)\, d\nu + \int_{\infty\nu}^{\nu} \frac{R(\nu) F'(\nu)\, d\nu}{\sqrt{v^{-2} - \nu}} \right] = M + G_1(\nu). \tag{9.30}$$

Il ressort de (9.9) que v_z s'annule effectivement pour $r = vt$. De l'expression de $G_1(\nu)$ dans (9.30) on déduit que cette fonction change de signe à la traversée de la coupure de v^{-2} à ∞. De ce fait l'intégrale prise de celle-ci dans la seconde formule (9.14) disparaît et nous obtenons l'expression des contraintes σ_z sous la forme

$$\sigma_z = \int_{l_\nu} \frac{d\nu}{\nu\sqrt{\nu - \nu_0}} M\sqrt{\nu_0} = -2M \quad (z = 0, \quad r < vt). \tag{9.31}$$

D'autre part $\sigma_z = \sigma_z^0$ ($z = 0$, $r < vt$), ce qui conduit à une expression explicite de la constante

$$\sigma_z^0 = 2A \int_0^{\infty} \frac{\left(\nu + \frac{1}{2} a_2^{-2}\right) - \nu\sqrt{a_1^{-2} + \nu}\sqrt{a_2^{-2} + \nu}}{(v^{-2} + \nu)^2 \sqrt{a_1^2 + \nu}}\, d\nu. \tag{9.32}$$

Rapportons également l'expression de v_z pour $z = 0$, $r < vt$:

$$v_z = -\frac{v^3 A t}{2\pi\sqrt{v^2 t^2 - r^2}}. \tag{9.33}$$

Intégrant celle-ci nous obtenons l'expression des déplacements auxquels sont soumis les bords de la coupure

$$u_z = -2\pi A v \sqrt{v^2 t^2 - r^2}. \tag{9.34}$$

CHAPITRE VI

REPRÉSENTATIONS INTÉGRALES ET TRANSFORMATIONS INTÉGRALES

§ 1. Problèmes de l'élasticité pour une bande et une couche

Considérons le problème plan pour une bande, i.e. pour le domaine $-\infty < x < \infty$, $|y| \leqslant a$ [156]. Sont à déterminer dans ce domaine les contraintes σ_x, σ_y, τ_{xy} vérifiant les équations d'équilibre (4.4), ch. III :

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0,$$

les équations de Beltrami-Mitchell (4.7), ch. III :

$$\Delta(\sigma_x + \sigma_y) = 0$$

et admettant sur la frontière des valeurs données

$$\sigma_y(x, y)|_{y=\pm a} = f(x), \quad \tau_{xy}(x, y)|_{y=\pm a} = \pm g(x). \tag{1.1}$$

Introduisons la condition

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, dx = 0, \tag{1.2}$$

équivalente à la condition voulant que les contraintes s'annulent à l'infini et dont la nécessité découle des considérations mathématiques dont il sera question dans la suite. Ici pour plus de simplicité x est l'axe de symétrie pour les conditions aux limites.

Nous considérerons au lieu des composantes des contraintes $\sigma_x(x, y)$, $\sigma_y(x, y)$ et $\tau_{xy}(x, y)$ leurs transformées de Fourier $\overline{\sigma}_x(\lambda, y)$, $\overline{\sigma}_y(\lambda, y)$ et $\overline{\tau}_{xy}(\lambda, y)$:

$$\overline{\sigma}_x(\lambda, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_x(x, y)\, e^{i\lambda x}\, dx,$$

$$\overline{\sigma}_y(\lambda, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_y(x, y)\, e^{i\lambda x}\, dx,$$

$$\overline{\tau}_{xy}(\lambda, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tau_{xy}(x, y)\, e^{i\lambda x}\, dx$$

et aussi les transformées de Fourier $\bar{f}(\lambda)$ et $\bar{g}(\lambda)$ des fonctions $f(x)$ et $g(x)$:

$$\bar{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{i\lambda x}\, dx, \quad \bar{g}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, e^{i\lambda x}\, dx.$$

On suppose naturellement que toutes les transformées de Fourier introduites existent (en ce qui concerne les fonctions $f(x)$ et $g(x)$, ceci est nécessaire).

Etablissons maintenant pour les transformées les équations analogues aux équations (4.4) et (4.7), ch. III. Appliquant l'opérateur de Fourier à tous les termes de la première des équations (4.4) par exemple, nous obtenons

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \sigma_x(x, y)}{\partial x}\, e^{i\lambda x}\, dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[e^{i\lambda x}\, \sigma_x \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_x(x, y)(i\lambda)\, e^{i\lambda x}\, dx \right] = -\, i\lambda \bar{\sigma}_x(\lambda, y).$$

Le deuxième terme se trouve d'emblée puisque dans le cas considéré la différentiation par rapport à x est celle par rapport au paramètre :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \tau_{xy}(x, y)}{\partial y}\, e^{i\lambda x}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\partial}{\partial y} \int_{-\infty}^{\infty} \tau_{xy}(x, y)\, e^{i\lambda x}\, dx = \bar{\tau}'_{xy}(\lambda, y),$$

où le cran désigne une différentiation par rapport à y.

Ainsi la première des équations (4.4) devient

$$-\, i\lambda \bar{\sigma}_x + \bar{\tau}_{xy}(\lambda, y) = 0. \tag{1.3}$$

D'une façon analogue (c'est-à-dire en partant du fait que la transformée de la dérivée par rapport à y est la dérivée, également par rapport à y, de la transformée, et la transformée de la dérivée par rapport à x est la transformée de la fonction initiale multipliée par $-\, i\lambda$), nous obtenons les équations correspondant à la deuxième équation (4.4) et à l'équation (4.7)

$$-\, i\lambda \bar{\tau}_{xy} + \bar{\sigma}'_y = 0, \tag{1.4}$$

$$(\bar{\sigma}_x + \bar{\sigma}_y)'' - \lambda^2 (\bar{\sigma}_x + \bar{\sigma}_y) = 0. \tag{1.5}$$

Ainsi, le système d'équations à dérivées partielles s'est ramené au système (1.3) à (1.5) d'équations différentielles ordinaires (la va-

riable y joue le rôle de paramètre), qu'il faut résoudre pour les conditions aux limites

$$\bar{\sigma}_y(\lambda, \pm a) = \bar{f}(\lambda), \quad \bar{\tau}_{xy}(\lambda, \pm a) = \bar{g}(\lambda). \tag{1.6}$$

Eliminant du système (1.3) à (1.5) les fonctions $\bar{\sigma}_x$ et $\bar{\tau}_{xy}$, nous obtenons une équation unique du quatrième ordre

$$\bar{\sigma}_y^{\mathrm{IV}} - 2\lambda^2\bar{\sigma}_y^{\mathrm{II}} + \lambda^4\bar{\sigma}_y = 0. \tag{1.7}$$

Au lieu de la seconde condition (1.6) nous avons maintenant

$$\bar{\sigma}'_y(\lambda, \pm a) = i\lambda\bar{g}(\lambda). \tag{1.8}$$

La solution générale du système (1.3) à (1.5) est de la forme

$$\bar{\sigma}(\lambda, y) = A(\lambda)\operatorname{ch}\lambda y + B(\lambda)\lambda y \operatorname{sh}\lambda y, \tag{1.9}$$

où $A(\lambda)$ et $B(\lambda)$ sont des fonctions arbitraires qu'on détermine des conditions (1.6) et (1.8) :

$$\begin{aligned} A(\lambda) &= 2\,\frac{\bar{f}(\mu \operatorname{ch}\mu + \operatorname{sh}\mu) - \bar{g}i\mu \operatorname{sh}\mu}{\operatorname{sh} 2\mu + 2\mu}, \\ B(\lambda) &= 2\,\frac{\bar{f}\operatorname{sh}\mu + \bar{g}i\operatorname{ch}\mu}{\operatorname{sh} 2\mu + 2\mu} \quad (\mu = \lambda a). \end{aligned} \tag{1.10}$$

Rapportons en outre les expressions des transformées $\bar{\sigma}_x(\lambda, y)$ et $\bar{\tau}_{xy}(\lambda, y)$:

$$\bar{\sigma}_x = -A\operatorname{ch}\lambda y + B(\lambda y \operatorname{sh}\lambda y + 2\operatorname{ch}\lambda y), \tag{1.11}$$

$$\bar{\tau}_{xy} = A\operatorname{sh}\lambda y + B(\lambda y \operatorname{ch}\lambda y + \operatorname{sh}\lambda y). \tag{1.12}$$

Les contraintes cherchées se trouvent par transformation inverse.

Attirons l'attention sur la circonstance suivante : pour $\lambda = 0$, le coefficient $B \to \infty$ et les inrégrales des originaux divergent. La condition nécessaire pour que le coefficient B soit borné est l'égalité $\bar{g}(0) = 0$ qui découle de la condition (1.2) :

$$\bar{g}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx.$$

Pour calculer effectivement les fonctions d'après les transformées (1.10) à (1.12) on a besoin de connaître les zéros de la fonction $\operatorname{sh} 2\mu + 2\mu$ figurant au dénominateur des expressions (1.10) ; ceci étant indispensable pour le calcul des intégrales à l'aide de la théorie des résidus.

L'appareil de la transformation de Fourier d'une fonction de deux variables ((4.17), ch. I) permet d'étendre l'approche exposée au problème de l'élasticité relatif à une couche [99]. Supposons

que le milieu élastique occupe le domaine $-\infty < x, y < \infty$, $|z| \leqslant h$. Pour plus de simplicité, le plan $z = 0$ sera plan de symétrie pour la solution. Les conditions aux limites sur les faces supérieure et inférieure de la couche s'écrivent

$$\sigma_z(x, y, z)|_{z=\pm h} = f(x, y), \tag{1.13}$$

$$\begin{aligned} \tau_{xz}(x, y, z)|_{z=\pm h} &= \pm g_1(x, y), \\ \tau_{yz}(x, y, z)|_{z=\pm h} &= g_2(x, y). \end{aligned} \tag{1.14}$$

Pour pouvoir appliquer la méthode exposée on doit exiger la vérification des égalités

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g_1(x, y)\, dx\, dy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g_2(x, y)\, dx\, dy = 0. \tag{1.15}$$

Nous partirons des équations de Beltrami-Mitchell (4.11), (4.16), (4.17), ch. II :

$$\Delta\sigma_z + \frac{1}{1+\sigma}\frac{\partial^2\Theta}{\partial z^2} = 0,$$

$$\Delta\tau_{xz} + \frac{1}{1+\sigma}\frac{\partial^2\Theta}{\partial x\,\partial z} = 0,$$

$$\Delta\tau_{yz} + \frac{1}{1+\sigma}\frac{\partial^2\Theta}{\partial y\,\partial z} = 0,$$

ainsi que de l'équation (4.6), ch. II :

$$\Delta(\Theta) = 0.$$

Appliquant l'opérateur de Fourier (en x et en y) nous arrivons à des équations différentielles ordinaires pour les transformées :

$$\begin{aligned} &\frac{d^2\overline{\sigma}_z}{dz^2} - \gamma^2\overline{\sigma}_z = -\frac{1}{1+\sigma}\frac{d^2\overline{\Theta}}{dz^2}, \\ &\frac{d^2\overline{\tau}_{xz}}{dz^2} - \gamma^2\overline{\tau}_{xz} = -\frac{i\lambda_x}{1+\sigma}\frac{d\overline{\Theta}}{dz}, \\ &\frac{d^2\overline{\tau}_{yz}}{dz^2} - \gamma^2\overline{\tau}_{yz} = -\frac{i\lambda_y}{1+\sigma}\frac{d\overline{\Theta}}{dz}, \\ &\frac{d^2\overline{\Theta}}{dz^2} - \gamma^2\overline{\Theta} = 0 \quad (\lambda = (\lambda_x, \lambda_y),\ \gamma = |\lambda|). \end{aligned} \tag{1.16}$$

La solution générale de ce système, paire en z, est de la forme

$$\bar{\sigma}_z = 2A_z \operatorname{ch} \gamma z - \frac{A\gamma z}{1+\sigma} \operatorname{sh} \gamma z,$$

$$\bar{\tau}_{xz} = -2A_x \operatorname{sh} \gamma z - \frac{i\lambda_x z A}{1+\sigma} \operatorname{ch} \gamma z, \qquad (1.17)$$

$$\bar{\tau}_{yz} = -2A_y \operatorname{sh} \gamma z - \frac{i\lambda_y z A}{1+\sigma} \operatorname{ch} \gamma z,$$

où A, A_x, A_y et A_z sont des fonctions des paramètres λ_x, λ_y liées entre elles par la relation

$$A = \frac{2(1+\sigma)}{\gamma} (A_z\gamma - i\lambda_x A_x - i\lambda_y A_y). \qquad (1.18)$$

Soient $\bar{f}$, $\bar{g}_1$ et $\bar{g}_2$ les transformées de Fourier des conditions aux limites $f(x, y)$, $g_1(x, y)$ et $g_2(x, y)$. Egalant leurs valeurs aux seconds membres de (1.17) nous obtenons un système permettant de déterminer les fonctions A, A_x, A_y et A_z. Rapportons la solution de ce système

$$A = \frac{1+\sigma}{\Delta_1} \left[\bar{f} \operatorname{sh} \gamma h + \frac{1}{\gamma} (i\lambda_x \bar{g}_1 + i\lambda_y \bar{g}_2) \operatorname{ch} \gamma h\right],$$

$$A_x = -\frac{1}{2 \operatorname{sh} \gamma h} \bar{g}_1 - \frac{i\lambda_x hA}{2(1+\sigma)} \operatorname{cth} \gamma h,$$

$$A_y = -\frac{1}{2 \operatorname{sh} \gamma h} \bar{g}_2 - \frac{i\lambda_y hA}{2(1+\sigma)} \operatorname{cth} \gamma h, \qquad (1.19)$$

$$A_z = \frac{1}{2 \operatorname{ch} \gamma h} + \frac{\gamma hA}{2(1+\sigma)} \operatorname{th} \gamma h,$$

$$\Delta_1 = \frac{1}{2} (\operatorname{sh} 2\gamma h + 2\gamma h).$$

Il convient de remarquer que la reconstitution des contraintes d'après (1.17) et (1.19) qui se ramène au calcul d'intégrales quadruples n'est possible que sous les conditions (1.15) (dans le cas contraire les intégrales divergent).

Le plan $z = 0$ étant un plan de symétrie, les formules (1.17), (1.19) donnent la solution du problème pour une couche d'épaisseur h, sur la face inférieure $z = 0$ de laquelle les contraintes tangentielles et la composante normale des déplacements sont nulles (en d'autres termes, la couche élastique repose sans adhérence sur

une base solide). Envisageons le cas où les valeurs frontières des contraintes tangentielles s'annulent [86]. Rapportons l'expression du déplacement w :

$$w = \frac{1}{2\pi G} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q(\lambda_x, \lambda_y)}{\gamma(2\gamma h + \operatorname{sh} 2\gamma h)} \left[\gamma h \operatorname{ch} \gamma h \operatorname{sh} \gamma z - \gamma z \operatorname{ch} \gamma z \operatorname{sh} \gamma h + \right.$$

$$\left. + 2\left(1 - \frac{2}{\sigma}\right) \operatorname{sh} \gamma z \operatorname{sh} \gamma h \right] e^{i(\lambda_x x + \lambda_y y)} \, d\lambda_x \, d\lambda_y, \qquad (1.20)$$

où

$$Q(\lambda_x, \lambda_y) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [\sigma_z]_{z=h} \, e^{-i(\lambda_x x + \lambda_y y)} \, dx \, dy.$$

Utilisons les formules (1.20) pour résoudre le problème suivant : une étampe solide s'applique sans adhérence sur l'aire Ω de la face extérieure d'une couche élastique, les contraintes en dehors de Ω étant nulles. On cherche la pression de contact $f(x, y)$.

Changeant dans (1.20) l'ordre d'intégration nous obtenons l'équation intégrale

$$\int_{\Omega} K(x - x', y - y', h) f(x', y') \, dx' \, dy' = 2\pi^2 \frac{G}{1 - \sigma} F(x, y), \qquad (1.21)$$

où

$$K(x - x', y - y', h) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sh}^2 \gamma h}{\gamma(2\gamma h + \operatorname{sh} 2\gamma h)} \, e^{i[\lambda_x (x - x') + \lambda_y (y - y')]} \, d\lambda_x \, d\lambda_y,$$

$F(x, y)$ est l'équation de la surface de l'étampe (compte tenu des constantes définissant son déplacement de solide).

On propose dans [3] un procédé de résolution de cette équation qui s'avère efficace pour $h > d/\sqrt{2}$, où d est le diamètre du domaine Ω (la fonction $f(x, y)$ est recherchée sous forme de développement en série suivant les puissances de $1/h$).

Envisageons maintenant un problème mixte de l'élasticité relatif à une bande [5]. Nous partirons des conditions aux limites

$$\tau_{xy} = -\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x \, \partial y}\right|_{y=\pm a} = 0, \quad \sigma_y = \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{y=\pm a} = 0, \quad 0 < x < \infty, \qquad (1.22)$$

$$v = \mp v_0|_{y=\pm a}, \quad -\infty < x \leqslant 0.$$

Introduisons en considération la solution particulière de l'équation d'Airy dans la bande

$$u_1(x, y) = \frac{2K}{m^2} \frac{(\sin ma + ma \cos ma) \cos my + my \sin ma \sin my}{2ma + \sin 2ma} e^{mx}$$

(k, m sont des constantes). Cette solution vérifie pour $y = \pm a$ les conditions aux limites

$$\tau_{xy} = 0, \quad \sigma_y = Ke^{mx}, \quad Ev = \pm \frac{4K}{m} \frac{\sin^2 ma}{2ma + \sin 2ma}. \qquad (1.23)$$

La fonction d'Airy du problème posé sera recherchée sous forme d'une intégrale [22], en supposant désormais K une fonction de ma

$$u(x, y) = \int_{-i\infty}^{(0-),\, +i\infty} u_1(x, y, m)\, dm \qquad (1.24)$$

(en écrivant $0-$ nous voulons dire que l'origine des coordonnées est contournée à gauche).

L'intégrale (1.24) sera supposée uniformément convergente dans la bande considérée avec toutes ses dérivées par rapport à x et y jusqu'au quatrième ordre. Nous aurons alors un problème aux limites avec les conditions suivantes :

$$\sigma_y = \frac{1}{a} \int_{-i\infty}^{(0-),\, +i\infty} K(\mu) e^{\mu\xi} d\mu, \quad Ev = \pm 4 \int_{-i\infty}^{(0-),\, +i\infty} \frac{K(\mu)}{\mu} \frac{\sin^2 \mu}{2\mu + \sin 2\mu} e^{\mu\xi} d\mu, \qquad (1.25)$$

où l'on a noté $ma = \mu$ et $x = a\xi$.

Ainsi, le problème posé se ramène à la détermination de la fonction $K(\mu)$.

En vertu de la deuxième condition (1.22) la fonction $K(\mu)$ doit être régulière dans le demi-plan $\operatorname{Re} \mu \leqslant 0$, sauf peut-être au point $\mu = 0$, et satisfaire les conditions du lemme de Jordan (§ 4, ch. I). De façon analogue, la troisième condition (1.22) veut que la fonction $\frac{K(\mu)}{\mu} \frac{\sin^2 \mu}{2\mu + \sin 2\mu}$ vérifie les mêmes conditions, mais déjà dans le demi-plan $\operatorname{Re} \mu \geqslant 0$ et admette au point $\mu = 0$ un pôle simple de résidu $\frac{Ev_0}{8\pi i}$.

Les conditions formulées seront satisfaites si la fonction $K(\mu)$ admet comme zéros les zéros du dénominateur $2\mu + \sin 2\mu$ à partie réelle positive. En même temps $K(\mu)$ peut admettre des pôles doubles aux points $\mu = \pi n$ ($n = 1, 2, \ldots$).

Procédons à la construction explicite de la fonction $K(\mu)$. Notons a_n les racines de l'équation $2\mu + \sin 2\mu$, elles sont évidemment symétriques et conjuguées. On montre [22] que la fonction $K(\mu)$ est représentable par des produits infinis

$$\frac{Ev_0}{2\pi i}\,\frac{1}{\mu}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1-\frac{\mu}{a_n}\right)\left(1-\frac{\mu}{\bar{a}_n}\right)}{\left(1-\frac{\mu}{\pi_n}\right)^2}=\frac{Ev_0}{2\pi i\mu}\,Q(\mu) \tag{1.26}$$

(tous les a_n possèdent évidemment une partie réelle positive).

En dernier lieu ramenons la représentation de la fonction d'Airy $u(\xi,\eta)$ obtenue au moyen de (1.26)

$$u(\xi,\ \eta)=\frac{Ev_0\,a}{\pi i}\int_{-i\infty}^{(0-),\,+i\infty}\frac{Q(\mu)(\sin\mu+\mu\cos\mu)\cos\mu\eta+\mu\eta\sin\mu\sin\mu\eta}{\mu^3(2\mu+\sin 2\mu)}\,e^{\mu\xi}\,d\mu$$

$$(x=a\xi,\quad y=a\eta)$$

à une forme plus commode pour les calculs et l'analyse. Utilisons pour cela le développement en série de Laurent de la fonction sous l'intégrale (sans le facteur $e^{\mu\xi}$). Nous avons

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu^3}+\frac{A}{\mu^2}+\frac{B+\frac{A^2}{2}-\frac{1}{3}}{\mu}\right)+\ldots$$

où

$$A=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n}+\frac{1}{\bar{a}_n}-\frac{2}{n\pi}\right),\quad B=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n^2}+\frac{1}{\bar{a}_n^2}-\frac{2}{n^2\pi^2}\right).$$

Posons $\mu=+it$ sur le demi-axe supérieur et $\mu=-it$ sur le demi-axe inférieur. Nous obtenons en définitive

$$u(\xi,\ \eta)=-\frac{2Ev_0\,a}{\pi}\int_0^{\infty}\left\{\frac{(\operatorname{sh}t+t\operatorname{ch}t)\operatorname{ch}t\eta-t\eta\operatorname{sh}t\operatorname{sh}t\eta}{2t+\operatorname{sh}2t}\,\frac{\operatorname{Im}[Q(it)\,l^{it\xi}]}{t^3}-\right.$$

$$\left.-\frac{\sin t\xi}{t^3}-\frac{A\cos t\xi}{t^2}\right\}dt+\begin{cases}-Ev_0a(B+A^2/2-1/3), & \xi>0,\\ -Ev_0\,a(\xi^2/2+A\xi), & \xi<0.\end{cases} \tag{1.27}$$

Dans [5] il est montré également que la représentation (1.27) vérifie toutes les conditions à l'infini et permet de se faire une idée du comportement de la solution aux points de changement des conditions aux limites.

Exposons encore un procédé de résolution des problèmes mixtes pour une bande quand sur l'un de ses côtés sont données des conditions aux limites d'un type et sur l'autre on a un point de changement des conditions aux limites [47]. On pose le problème de la flexion d'une plaque en forme d'une bande. Supposons que la bande occupe le domaine

$$0 \leqslant y \leqslant 1, \quad -\infty < x < \infty \tag{1.28}$$

et que le côté $y = 1$ est appuyé. Dans ce cas la flèche w vérifie les conditions

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0. \tag{1.29}$$

Sur le côté $y = 0$ par contre on a des conditions de type mixte (appui et encastrement) :

$$\begin{aligned} &w = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{pour } x < 0,\\ &w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \varphi(x) \quad \text{pour } x > 0. \end{aligned} \tag{1.30}$$

Introduisons en considération le moment fléchissant $m(x)$ sur le demi-axe $x > 0$, qui est une grandeur inconnue.

Comme au début du paragraphe passons à la transformée de Fourier directement pour la flèche w. Admettons que la fonction $w(x, y)\, e^{-\beta(x)}$ $(\lambda = \alpha + i\beta)$ est sommable sur l'axe $-\infty < x < \infty$ pour $a_1 < \beta < a_2$.

Des conditions aux limites nous tirons

$$\begin{aligned} &\bar{w} = \frac{d^2\bar{w}}{dy^2} = 0 \qquad \text{pour } y = 1,\\ &\bar{w} = \frac{d^2\bar{w}}{dy^2} = -M_+(\lambda) \quad \text{pour } y = 0. \end{aligned} \tag{1.31}$$

$M_+(\lambda)$ désigne la transformée de $m(x)$. Si la fonction $m(x)e^{-\beta x}$ est sommable sur le demi-axe $(0, \infty)$ pour tous les $\beta > a_1$, la fonction $M_+(\lambda)$ est alors régulière dans le demi-plan $\operatorname{Im} \lambda > a_1$.

La représentation de la transformée vérifiant les conditions aux limites obtenues est la suivante

$$\bar{w}(\lambda, y) = \frac{M_+(\lambda)}{2\lambda \sin^2 \lambda} [-(1 + y \sin h^2\lambda) \sin h\, \lambda y + \\ + y \sin h\lambda \cos h\lambda \cos h\lambda y]. \tag{1.32}$$

La dérivée $\frac{\partial \overline{w}}{\partial y}$ pour $y = 0$ s'avère égale à

$$M_+(\lambda)\,\frac{\sin h\lambda \cos h\lambda - \lambda}{2\lambda \sin h^2\lambda}. \tag{1.33}$$

Passant à l'original, nous obtenons

$$\left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{y=0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{ia-\infty}^{ia+\infty} M_+(\lambda)\frac{\sin h\lambda \cos h\lambda - \lambda}{2\lambda \sin h^2\lambda}\, e^{-i\lambda x}\, d\lambda. \tag{1.34}$$

Ici $a_1 < a < a_2$.

Introduisons les fonctions $\varphi_+(\lambda)$ et $\varphi_-(\lambda)$:

$$\varphi_+(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^\infty \varphi(x)\, e^{i\lambda x}\, dx,$$

$$\psi_-(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^0 \varphi(x)\, e^{i\lambda x}\, dx.$$

$\varphi_+(\lambda)$ est connue, $\varphi_-(\lambda)$ est à déterminer. Ces fonctions sont analytiques respectivement dans les demi-plans $\operatorname{Im}\lambda > a_1$ et $\operatorname{Im}\lambda < a_2$. On a évidemment l'égalité

$$\int\limits_{ia-\infty}^{ia+\infty} M_+(\lambda) H(\lambda)\, e^{-i\lambda x} = \left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{y=0} =$$

$$= \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{ia-\infty}^{ia+\infty} \varphi_+(\lambda)\, e^{-i\lambda x}\, d\lambda + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{ia-\infty}^{ia+\infty} \varphi_-(\lambda)\, e^{-i\lambda x}\, d\lambda, \tag{1.35}$$

où

$$H(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{\sin h\lambda \cos h\lambda - \lambda}{2\lambda \sin h^2\lambda}.$$

Les résultats obtenus dans [154] permettent d'affirmer que

$$\sqrt{2\pi}\, M_+(\lambda)\, H(\lambda)\, e^{-i\lambda x}\, dx - \varphi_+(\lambda) = \varphi_-(\lambda). \tag{1.36}$$

Les termes de cette égalité sont analytiques dans le demi-plan $\operatorname{Im}\lambda < a$. Comme il apparaît de la formule (1.72) du chapitre I,

la construction effective de la solution du problème étudié est encombrante. Aussi propose-t-on de simplifier le problème en substituant à la fonction $H(\lambda)$ une fonction approchée pour laquelle le problème de factorisation se résout sous forme explicite. Dans l'ouvrage cité on propose deux approximations

$$H^*(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{A}{\sqrt{\lambda^2+B^2}} \quad \text{et} \quad H^{**}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{A}{\sqrt{\lambda^2+B^2}}\frac{\lambda^4+C\lambda^2+D}{\lambda^4+E\lambda^2+D}.$$

Dans le premier cas les constantes A et B sont tirées des conditions d'égalité des fonctions H et H^* aux points $\lambda = 0$ et $\lambda = \infty$, ce qui donne $A = 1/2$ et $B = 3/2$. L'erreur ne dépasse pas alors 10 %. Pour une approximation plus exacte on utilise la fonction $H^{**}(\lambda)$ avec les mêmes valeurs de A et B. (La structure de l'expression de $H^{**}(\lambda)$ montre que le facteur en λ^4 est égal à l'unité pour $\lambda = 0$ et $\lambda = \infty$.) Avec $C = 6{,}9$, $D = 20$ et $E = 5{,}4$ l'erreur n'excède pas 0,7 %.

Représentons la fonction $H^{**}(\lambda)$ sous la forme

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{A}{\sqrt{\lambda+iB}\sqrt{\lambda-iB}}\frac{(\lambda-\alpha-i\beta)(\lambda-\alpha+i\beta)(\lambda+\alpha-i\beta)(\lambda+\alpha+i\beta)}{(\lambda-\mu-i\nu)(\lambda-\mu+i\nu)(\lambda+\mu-i\nu)(\lambda+\mu+i\nu)}. \tag{1.37}$$

Les racines sont prises dans le plan complexe présentant des coupures de $-iB$ à $-i\infty$ et de iB à $i\infty$. Toutes les valeurs de α, β, μ et ν sont positives.

Posons $\varphi(x) = \text{const}$ pour $x > 0$. Dans ce cas $\varphi_+(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{i}{\lambda}$.

La solution se construit alors sous forme explicite

$$M_+(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{i}{A\lambda}\sqrt{-iB}\sqrt{\lambda+iB}\frac{(\lambda-\mu+i\nu)(\lambda+\mu+i\nu)}{(\lambda-\alpha+i\beta)(\lambda+\alpha+i\beta)}, \tag{1.38}$$

$$\varphi_-(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{i}{\lambda}\left[\frac{\sqrt{-iB}}{\sqrt{\lambda-iB}}\frac{(\lambda-\alpha-i\beta)(\lambda+\alpha-i\beta)}{(\lambda-\mu-i\nu)(\lambda+\mu-i\nu)} - 1\right]. \tag{1.39}$$

§ 2. Coin. Paradoxe de Carothers

Supposons que le milieu élastique occupe un domaine en forme de coin. En coordonnées polaires (r, θ) la fonction d'Airy U de (4.20), ch. III, doit vérifier l'équation

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)^2 U = 0. \tag{2.1}$$

Les composantes du tenseur des contraintes sont liées à la fonction d'Airy par les relations

$$\sigma_r = \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2},$$
$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}, \quad \tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\right). \tag{2.2}$$

Soit l'angle d'ouverture du coin 2α $(-\alpha \leqslant \theta \leqslant \alpha)$. Les faces du coin seront supposées soumises aux contraintes

$$\sigma_\theta = f_1(r), \quad \tau_{r\theta} = g_1(r) \quad (\theta = \alpha);$$
$$\sigma_\theta = f_2(r), \quad \tau_{r\theta} = g_2(r) \quad (\theta = -\alpha). \tag{2.3}$$

Les restrictions à imposer aux conditions aux limites seront précisées plus bas.

Pour résoudre le problème aux limites posé nous appliquons la transformation de Mellin (4.31), ch. I, c'est-à-dire que nous passons de la fonction cherchée $U(r, \theta)$ à sa transformée $\overline{U}(p, \theta)$:

$$\overline{U}(p, \theta) = \int_0^\infty r^{p-1}\, U(r, \theta)\, dr. \tag{2.4}$$

Supposons ensuite la fonction U telle que les expressions

$$r^{p+n}\frac{\partial^n U}{\partial r^n} \quad (n = 0, 1, 2, 3),$$
$$r^p\frac{\partial^n U}{\partial \theta^n} \quad (n = 1, 2), \quad r^{p+1}\frac{\partial^3 U}{\partial r\, \partial \theta^2}$$

tendent vers zéro lorsque r tend vers l'infini. Appliquant à (2.4) la formule d'intégration par parties, nous obtenons

$$\int_0^\infty r\frac{\partial U}{\partial r} r^{p-1}\, dr = -p\overline{U},$$
$$\int_0^\infty r^2\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} r^{p-1}\, dr = p(p+1)\,\overline{U},$$
$$\int_0^\infty r^3\frac{\partial^3 U}{\partial r^3} r^{p-1}\, dr = -p(p+1)\,(p+2)\,\overline{U}, \tag{2.5}$$
$$\int_0^\infty r^4\frac{\partial^4 U}{\partial r^4} r^{p-1}\, dr = p(p+1)(p+2)(p+3)\,\overline{U}.$$

Une dérivation préliminaire par rapport à l'angle θ considéré comme paramètre nous donne de façon analogue

$$\begin{gathered}\int_0^\infty r\frac{\partial^{n+1}U}{\partial r\,\partial\theta^n}r^{p-1}dr = -p\frac{d^n\overline{U}}{d\theta^n}\quad (n = 0, 1, 2),\\ \int_0^\infty r^2\frac{\partial^{n+2}U}{\partial r^2\,\partial\theta^n}r^{p-1}\,dr = p(p+1)\frac{d^n\overline{U}}{d\theta^n}\quad (n = 0, 2).\end{gathered}\tag{2.6}$$

Appliquons la transformation de Mellin à tous les termes de l'équation (2.1). Utilisant les formules (2.5) et (2.6), nous aboutissons à une équation différentielle ordinaire

$$\left(\frac{d^2}{d\theta^2}+p^2\right)\left[\frac{d^2}{d\theta^2}+(p+2)^2\right]\overline{U} = 0. \tag{2.7}$$

Les formules (2.2) permettent d'obtenir les expressions des transformées des contraintes. Pour faciliter l'usage de la transformation de Mellin il est plus rationnel de se servir des formules des transformées prises des produits des contraintes par le carré de la distance $r^2\sigma_r$, $r^2\sigma_\theta$ et $r^2\tau_{r\theta}$. Les transformées correspondantes seront toujours désignées par $\overline{\sigma}_r$, $\overline{\sigma}_\theta$ et $\overline{\tau}_{r\theta}$. Les formules (2.5), (2.6) impliquent

$$\overline{\sigma}_r = \left(\frac{d^2}{d\theta^2} - p\right)\overline{U}(p, \theta), \tag{2.8}$$

$$\overline{\sigma}_\theta = p(p+1)\,\overline{U}(p, \theta). \tag{2.9}$$

$$\overline{\tau}_{r\theta} = (p+1)\frac{d\overline{U}(p, \theta)}{d\theta}. \tag{2.10}$$

La solution générale de l'équation (2.7) est de la forme

$$\begin{gathered}\overline{U} = A(p)\sin(p\theta) + B(p)\cos(p\theta) + C(p)\sin[(p+2)\theta] +\\ + D(p)\cos[(p+2)\theta].\end{gathered}\tag{2.11}$$

Les fonctions $A(p)$, $B(p)$, $C(p)$ et $D(p)$ sont déterminées à partir des conditions aux limites pour l'équation (2.7), i.e. à partir des expressions (2.9) et (2.10) en y faisant $\theta = \pm\alpha$. Ces fonctions s'expriment alors directement par les intégrales prises des valeurs aux limites (2.3). Reconstituant l'original au moyen de l'intégrale (4.32), ch. I, nous obtenons la solution formelle du problème sous forme d'intégrales doubles.

Nous nous limiterons ensuite au cas de chargement antisymétrique du coin, supposant complémentairement que les contrain-

tes tangentielles s'annulent sur ses faces [148]. En ce qui concerne les contraintes normales, nous admettrons que $f_1(r) = -f_2(r) = 0$ pour des r supérieurs à un certain a (l'indice de la fonction f est omis dans la suite).

La fonction $\bar{g}(p)$ sera dans ce cas nulle et la fonction $\bar{f}(p)$ est donnée par l'intégrale

$$\bar{f}(p) = \int_0^a f(r)\, r^{p+1}\, dr. \tag{2.12}$$

(Rappelons qu'on considère la transformée du produit des contraintes par r^2.)

Exigeons maintenant en outre que la résultante des contraintes appliquées à chaque face s'annule. Dans ce cas pour la transformée $\bar{f}(p)$ de (2.12) nous obtenons

$$\bar{f}(-1) = 0. \tag{2.13}$$

Sans concrétiser pour le moment le type du chargement, nous introduisons en considération sa caractéristique intégrale, i.e. le moment total M s'exerçant sur les deux faces. Pour la transformée $\bar{f}(p)$ nous obtenons alors encore une condition

$$\bar{f}(0) = \frac{M}{2}. \tag{2.14}$$

Etant donné l'antisymétrie, la solution générale de l'équation (2.11) se simplifie et prend la forme

$$\bar{U} = A(p) \sin(p\theta) + C(p) \sin[(p+2)\theta]. \tag{2.15}$$

Il n'y a aucune difficulté à obtenir les expressions des fonctions $A(p)$ et $C(p)$

$$A = -\frac{\bar{f}(p)(p+2)\cos[(p+2)\alpha]}{p(p+1)\,G(p,\alpha)}, \quad C = \frac{\bar{f}(p)\cos p\alpha}{(p+1)\,G(p,\alpha)}, \tag{2.16}$$

où

$$G(p, \alpha) = (p+1)\sin 2\alpha - \sin[2(p+1)\alpha]. \tag{2.17}$$

Rapportons également les expressions des transformées $\bar{\sigma}_r$, $\bar{\sigma}_\theta$ et $\bar{\tau}_{r\theta}$:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_r &= -Ap(p+1)\sin p\theta - C(p+1)(p+4)\sin[(p+2)\theta], \\ \bar{\sigma}_\theta &= Ap(p+1)\sin p\theta + Cp(p+1)\sin[(p+2)\theta], \\ \bar{\tau}_{r\theta} &= Ap(p+1)\cos p\theta + C(p+1)(p+2)\cos[(p+2)\theta]. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Rappelons les expressions de chacune des composantes des contraintes, notées pour l'unicité de l'écriture σ :

$$\sigma = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \overline{\sigma} r^{p-2} \, dp. \tag{2.19}$$

La constante c se choisit de la condition d'existence des intégrales : il est commode de poser $c = -1$, puisque de (2.16) découlera la régularité de l'expression sous l'intégrale sur la droite $(c - i\infty,$ $c + i\infty)$. Pour simplifier l'analyse nous nous limiterons à la solution qui s'obtient pour de grandes valeurs de r. Aussi le contour d'intégration fermé sera-t-il composé de la droite $c = -1$ complétée à droite par un arc. Pour pouvoir appliquer la théorie des résidus au calcul des intégrales il faut étudier les zéros éventuels de la fonction $G(p, \alpha)$ de (2.17) à droite et au voisinage de la droite $c = -1$ en fonction de l'angle α. Remarquons que sur la droite $\mathrm{Re}\, p = -1$ il n'y a aucun zéro complexe de la fonction $G(p, \alpha)$.

La dérivée partielle de $G(p, \alpha)$ est

$$\frac{\partial G}{\partial p} = \sin 2\alpha - 2\cos[2(p+1)\alpha]. \tag{2.20}$$

Les valeurs de p qui vérifieront simultanément les équations $G(p, \alpha) = 0$ et $\partial G(p, \alpha)/\partial p = 0$ sont des zéros de multiplicité deux de la fonction $G(p, \alpha)$.

Considérons maintenant le point $p = 0$. Il sera toujours un zéro. Dans le cas où l'angle α vérifie la condition

$$\sin 2\alpha - 2\cos 2\alpha = 0 \tag{2.21}$$

compte tenu de (2.20), le zéro est multiple. Nous appellerons cet angle *critique* et nous le désignerons par α^*, remarquant que $\alpha^* = 0{,}715\ \pi$.

Trois cas sont à distinguer. Dans le premier cas $\alpha < \alpha^*$ et dans la bande $-1 < \mathrm{Re}\, p < 0$ la fonction $G(p, \alpha)$ n'a pas de zéros, tandis que le point $p = 0$ est un zéro simple. Dans le deuxième cas $\alpha = \alpha^*$ et dans la bande $-1 < \mathrm{Re}\, p < 0$ il n'y a toujours pas de zéros, mais le point $p = 0$ est un zéro multiple. Dans le troisième cas $\alpha > \alpha^*$ et dans la bande $-1 < \mathrm{Re}\, p < 0$ apparaît un zéro réel simple $\lambda(\alpha)$ tel que $-0{,}5 < \lambda(\alpha)$, et le point $p = 0$ est de nouveau un zéro simple.

L'analyse effectuée nous sera utile dans l'application de la méthode des résidus à la recherche de la partie principale de l'expression (2.19). Comme nous cherchons la solution pour de grands r, nous n'allons calculer les résidus qu'en les points les plus proches de la droite $\mathrm{Re}\, p = -1$, c'est-à-dire que dans le premier

et second cas il faut connaitre le résidu au point $p = 0$ uniquement et dans le troisième, au point $\lambda(\alpha)$ qu'on détermine préalablement de l'équation transcendante $G(p, \alpha) = 0$.

Normons le domaine de chargement et la condition aux limites, posant $\rho = r/a$ et $\varphi(\rho) = 2a^2 f(r)/M$. Il vient

$$\int_0^1 \varphi(\rho)\, d\rho = 0, \quad \int_0^1 \rho\varphi(\rho)\, d\rho = 1,$$

$$\bar{\varphi}(p) = \int_0^1 \rho^{p+1} \varphi(\rho)\, d\rho = \frac{2\bar{f}(p)}{Ma^p}.$$

Remarquons que tous les résultats qui suivent ne sont vrais que pour $\rho > 1$. Dans le premier cas l'expression de σ_r (conformément à (2.16), (2.18)) sera de la forme

$$\sigma_r = \frac{2M \sin 2\theta}{a^2(\sin 2\alpha - 2\alpha \cos 2\alpha)\, \rho^2} + O(\rho^{-2}), \tag{2.22}$$

puisque le résidu n'est pris qu'au point $p = 0$.

Dans le deuxième cas l'expression de σ_r aura un aspect plus complexe puisqu'au point $p = 0$ on a un zéro multiple (pour calculer le résidu il faut multiplier l'expression sous l'intégrale par p, puis la dériver par rapport à p et poser $p = 0$) :

$$\sigma_r = \frac{M}{12a^2 \alpha^2 \sin 2\alpha \rho^2} \{[12\, \bar{\varphi}'(0) - 12 \ln \rho - 1] \sin 2\theta + \\ + 12\, \theta \cos 2\theta - 6\theta \cos 2\alpha\} + O(\rho^{-2})$$

$$\left(\bar{\varphi}'(0) = \frac{d\bar{\varphi}}{dp}\bigg|_{p=0} = \int_0^1 \varphi(\rho)\, \rho \ln \rho\, d\rho\right). \tag{2.23}$$

Dans le troisième cas le premier terme se détermine par le résidu au point $\lambda(\alpha)$ et le second, par le résidu au point $p = 0$:

$$\sigma_r = \frac{M\bar{\varphi}(\lambda)[(\lambda + 4) \cos \lambda\alpha \sin (\lambda + 2)\theta - (\lambda + 2) \cos (\lambda + 2)\alpha \sin \lambda\theta]}{2a^2\{\sin 2\alpha - 2\alpha \cos[2(\lambda + 1)\alpha]\}\, \rho^{\lambda+2}} + \\ + \frac{2M \sin 2\theta}{a^2(\sin 2\alpha - 2\alpha \cos 2\alpha)\, \rho^2} + O(\rho^{-2}). \tag{2.24}$$

Procédons à l'analyse des expressions (2.22) à (2.24) (celles des σ_θ et $\tau_{r\theta}$ sont de même structure). Remarquons tout d'abord

que les formules obtenues sont solution d'une classe de problèmes aux limites dans lesquels la charge et le domaine de son application restent inchangés, alors que le point considéré tend vers l'infini. Ces mêmes formules donnent également la solution du problème équivalent quand le point est fixé dans le domaine, mais la zone d'application de la charge diminue, alors que le type de la condition aux limites se conserve sous forme adimensionnelle, i.e. la fonction est invariante, ce qui conduit à la limite au problème d'un coin sollicité au sommet par un moment (cf. § 7, ch. III).

Rapportons l'expression de σ_r qui peut être obtenue pour ce problème immédiatement par la méthode de séparation des variables (§ 2, ch. IV) :

$$\sigma_r = \frac{2M \sin 2\theta}{r^2(\sin 2\alpha - 2\alpha \cos 2\alpha)}. \tag{2.25}$$

Comparant (2.22) et (2.25) on voit qu'à la limite, la solution obtenue par des méthodes rigoureuses se confond avec la solution formelle (2.25). Par conséquent, la distribution des contraintes ne dépend pas à la limite du caractère réel de la condition aux limites et se détermine par le moment résultant. Dans le troisième cas, l'expression (2.24) comporte la solution (2.25), mais ce terme n'est pas principal, de sorte qu'à la limite l'état de contrainte ne se détermine que par le premier terme. L'essentiel est que ce terme dépend de la fonction φ et, par conséquent, de la nature de la charge. Nous avons là un exemple contredisant la formulation généralement admise du principe de Saint-Venant.

Notons encore le cas où

$$\overline{\varphi}(\lambda) = \int_0^1 \rho^{\lambda+1} \varphi(\rho)\, d\rho = 0.$$

Alors le premier terme de (2.24) disparaît et la solution (2.25) s'avère de nouveau vraie. Dans le deuxième cas (formule (2.24)), la présence du terme contenant $\ln \rho$ interdit le passage à la limite.

Ce qui vient d'être dit permet d'expliquer le *paradoxe de Carothers*, consistant en ce que dans la solution (2.25) $\sigma_r \to \infty$ lorsque $\alpha \to \alpha^*$, puisque dans ce cas (2.25) n'est pas la partie principale de la solution (2.24).

Remarquons en conclusion que résolvant le problème d'un coin pour d'autres conditions aux limites ($f_1 \neq -f_2$) on constate que la formule (2.25) est vraie pour des angles α moindres que ceux qui s'obtiennent dans la position considérée du problème.

§ 3. Problème à symétrie axiale pour une couche à coupure circulaire

Soit dans une couche d'épaisseur $2h$ une coupure de rayon a dans le plan médian $z = 0$ sollicité par des pressions normales uniquement, les mêmes des deux faces. Supposons les frontières de la couche libres de contraintes, de sorte que le plan $z = 0$ est un plan de symétrie.

Les conditions aux limites sont

$$\sigma_z(\rho, \pm h) = 0, \quad \tau_{\rho z}(\rho, \pm h) = 0, \tag{3.1}$$

$$\sigma_z(\rho, 0) = p(\rho), \quad \tau_{\rho z}(\rho, 0) = 0 \quad (\rho < a). \tag{3.2}$$

Pour des raisons de symétrie on a en outre

$$\tau_{\rho z}(\rho, 0) = 0 \quad (\rho < a), \tag{3.3}$$

$$u_z(\rho, 0) = 0 \quad (\rho > a). \tag{3.4}$$

Notre approche se fonde sur les représentations de Papkovitch-Neuber qui, étant donné la symétrie axiale, comportent deux fonctions harmoniques φ et ψ_z. Rappelons les expressions des composantes des déplacements et des contraintes (cf. (5.45), (5.46), ch. III)

$$u_z = (3 - 4\nu)\,\psi - z\frac{\partial\psi}{\partial z} - \frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

$$(2G)^{-1}\sigma_z = 2(1-\nu)\frac{\partial\psi}{\partial z} - z\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2},$$

$$(2G)^{-1}\tau_{\rho z} = \frac{\partial}{\partial\rho}\left[(1-2\nu)\psi - z\frac{\partial\psi}{\partial z} - \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right],$$

où l'indice de la fonction φ_z est omis.

Nous partirons de la représentation des fonctions harmoniques φ et ψ sous forme d'intégrales [157]

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \int_0^\infty [A_1 \operatorname{ch}\lambda(h-z) + B_1 \operatorname{sh}\lambda(h-z)]\,J_0(\lambda\rho)\,\frac{d\lambda}{\operatorname{sh}\lambda h}, \tag{3.5}$$

$$\psi = \int_0^\infty [A_2 \operatorname{ch}\lambda(h-z) + B_2 \operatorname{sh}\lambda(h-z)]\,J_0(\lambda\rho)\,\frac{d\lambda}{\operatorname{sh}\lambda h}, \tag{3.6}$$

où $A_1(\lambda)$, $B_1(\lambda)$, $A_2(\lambda)$ et $B_2(\lambda)$ sont des fonctions devant être déterminées. Les conditions (3.1) permettent d'écrire

$$A_1(\lambda) = (1-2\nu)\,A_2(\lambda) + \lambda h B_2(\lambda), \tag{3.7}$$

$$B_1(\lambda) = \lambda h A_2(\lambda) + 2(1-\nu)\,B_2(\lambda). \tag{3.8}$$

La condition $\tau_{\rho z}(\rho, 0) = 0$ conduit à une autre relation entre ces fonctions qu'on peut écrire, compte tenu de (3.7) et (3.8), sous une forme compacte

$$\lambda\, h A_2(\lambda) + (1 + \lambda h \operatorname{cth} \lambda h) B_2(\lambda) = 0. \tag{3.9}$$

Les relations (3.7) à (3.9) permettent d'exprimer n'importe quelles trois fonctions par la quatrième. Exprimons-les toutes par $B_2(\lambda)$, utilisant les conditions (3.2) et (3.4) et, naturellement, les représentations (3.5) et (3.6). Nous aboutissons alors aux équations

$$\int_0^\infty B_2(\lambda) \frac{\lambda h + \operatorname{ch}\lambda h \operatorname{sh}\lambda h}{\lambda h \operatorname{sh}^2 \lambda h} J_0(\lambda\rho)\, d\lambda = 0 \quad (\rho > a), \tag{3.10}$$

$$\int_0^\infty \lambda B_2(\lambda) \frac{\operatorname{sh}^2 \lambda h - \lambda^2 h^2}{\lambda h \operatorname{sh}^2 \lambda h} J_0(\lambda\rho)\, d\lambda = p(\rho)\,(2G)^{-1} = f(\rho). \tag{3.11}$$

Donnons-leur une forme plus compacte :

$$\int_0^\infty B(\lambda)\, J_0(\lambda\rho)\, d\lambda = 0 \quad (\rho > a), \tag{3.10'}$$

$$\int_0^\infty \lambda[1 - g(\lambda)]\, B(\lambda) J_0(\lambda\rho)\, d\lambda = f(\rho) \quad (\rho < a), \tag{3.11'}$$

où

$$B(\lambda) = B_2(\lambda) \frac{\lambda h + \operatorname{ch} \lambda h \operatorname{sh} \lambda h}{\lambda h \operatorname{sh}^2 \lambda h},$$

$$g(\lambda) = \frac{\lambda h(1 + \lambda h) + e^{-\lambda h} \operatorname{sh} \lambda h}{\operatorname{ch} \lambda h \operatorname{sh} \lambda h + \lambda h}.$$

Si le corps élastique présentant une coupure est un demi-espace, on partira des représentations

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \int_0^\infty A(\lambda)\, e^{-\lambda z} J_0(\lambda\rho)\, d\lambda, \tag{3.5'}$$

$$\psi = \int_0^\infty B(\lambda)\, e^{-\lambda z} J_0(\lambda\rho)\, d\lambda \tag{3.6'}$$

(ces formules sont valables pour le demi-espace supérieur). Nous aboutissons aux mêmes équations (3.10) et (3.11), mais pour $g(\lambda) = 0$.

Avec la représentation

$$B(\lambda) = \int_0^a C(t) \sin \lambda t \, dt, \tag{3.12}$$

l'équation (3.10') est une identité. En effet,

$$\int_0^\infty B(\lambda) J_0(\lambda\rho) \, d\lambda = \int_0^a C(t) \, dt \int_0^\infty J_0(\lambda\rho) \sin \lambda t \, d\lambda. \tag{3.13}$$

La dernière intégrale est *l'intégrale de Weber* [35] prenant les valeurs suivantes :

$$\int_0^\infty J_0(\lambda\rho) \sin \lambda t \, d\lambda = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant t < \rho, \\ (t^2 - \rho^2)^{-1/2}, & 0 < \rho < t. \end{cases} \tag{3.14}$$

Comme dans notre cas $t < a$ et $\rho > a$, alors $\rho \geqslant t$, ce qui démontre la proposition énoncée.

Portons maintenant (3.12) dans (3.11) et intégrons par rapport à ρ, utilisant pour cela l'identité

$$\lambda\rho \, J_0(\lambda\rho) = \frac{d}{d\rho} [\rho J_1(\lambda\rho)]. \tag{3.15}$$

Nous obtenons

$$\rho \int_0^a C(t) \, dt \int_0^\infty J_1(\lambda\rho) \sin \lambda t \, d\lambda - \rho \int_0^a C(t) \, dt \int_0^\infty g(\lambda) J_1(\lambda\rho) \sin \lambda t \, d\lambda =$$

$$= \int_0^\rho \rho f(\rho) \, d\rho = f_1(\rho). \tag{3.16}$$

Utilisant d'autre part l'égalité

$$\int_0^\infty J_1(\lambda\rho) \sin \lambda t \, d\lambda = \begin{cases} 0, & \rho < t, \\ \frac{t}{\rho} (\rho^2 - t^2)^{-1/2}, & \rho > t, \end{cases} \tag{3.17}$$

nous ramenons l'équation (3.16) à la forme

$$\int_0^\rho \frac{tC(t)dt}{\sqrt{\rho^2 - t^2}} - \int_0^a C(t) \, dt \int_0^\infty g(\lambda) \sin \lambda t J_1(\lambda\rho) \, d\lambda = f_1(\rho). \tag{3.18}$$

Faisons l'usage de la représentation intégrale de la fonction $J_1(\lambda\rho)$:

$$J_1(\lambda\rho) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin \theta \sin (\lambda\rho \sin \theta) \, d\theta \tag{3.19}$$

et effectuons la substitution

$$t = \rho \sin \theta. \tag{3.20}$$

Nous obtenons l'équation

$$\int_0^{\pi/2} \left[C(\rho \sin \theta) - \frac{2}{\pi} \int_0^a C(t)\, dt \int_0^\infty g(\lambda) \sin \lambda t \sin (\lambda \rho \sin \theta)\, d\lambda \right] \times$$

$$\times \rho \sin \theta \, d\theta = f_1(\rho) \tag{3.21}$$

que nous pouvons écrire symboliquement sous la forme

$$\int_0^{\pi/2} \Phi(\rho \sin \theta)\, \rho \sin \theta \, d\theta = \int_0^{\pi/2} \Phi_1(\rho \sin \theta)\, d\theta = f_1(\rho). \tag{3.21'}$$

Cette équation est l'équation de Schlömilkh (2.41), ch. I. Sa solution continue se représente par la formule

$$\Phi_1(\rho) = \frac{2}{\pi} \left[f_1(0) + \rho \int_0^{\pi/2} f_1'(\rho \sin \theta)\, d\theta \right]. \tag{3.22}$$

Comme dans notre cas $f_1(0) = 0$, nous avons

$$C(t) - \frac{2}{\pi} \int_0^a \left[\int_0^\infty g(\lambda) \sin \lambda t \sin \lambda y \, d\lambda \right] C(y)\, dy = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} f_1'(t \sin \theta)\, d\theta. \tag{3.23}$$

Cette expression est une équation intégrale de Fredholm de deuxième espèce. Résolvant cette équation (en général, numériquement) et effectuant un passage inverse nous trouvons tous les paramètres qui nous intéressent.

Dans le cas d'un espace infini à coupure $g(\lambda) = 0$ l'équation se dégénère et sa solution coïncide avec le second membre

$$C(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} f_1'(t \sin \theta)\, d\theta. \tag{3.24}$$

Rapportons les expressions des déplacements $u_z(\rho, 0)$ pour $\rho < a$ et des contraintes σ_z sur le prolongement de la coupure pour $\rho > a$ dans le cas le plus simple où $p = p_0$:

$$u_z = \frac{4p_0(1 - \nu^2)}{\pi E} (a^2 - \rho^2)^{1/2}, \tag{3.25}$$

$$\sigma_z = - \frac{2p_0}{\pi} \left[\arcsin \frac{a}{\rho} - a(\rho^2 - a^2)^{-1/2} \right]. \tag{3.26}$$

On en tire l'expression du coefficient d'intensité des contraintes (cf. § 9, ch. III)

$$K_I = \frac{\sqrt{2}\, p_0 a^{1/2}}{\pi}. \tag{3.27}$$

§ 4. Problème plan sur l'action d'une force impulsive concentrée (problème de Lamb)

Supposons que sur la frontière du demi-espace $y \geqslant 0$ qui se trouve au repos pour $t < 0$, à l'instant $t = 0$ agit une force impulsive concentrée uniformément distribuée suivant la droite $y = x = 0$:

$$\sigma_y = -k\delta(x)\delta(t) \quad (k = \text{const}, \ y = 0). \tag{4.1}$$

Comme les conditions aux limites et initiales ne dépendent pas de z, le problème envisagé est un problème plan. Ceci étant, le système d'équations du mouvement du milieu, les conditions aux limites et initiales sont de la forme

$$\Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial\tau^2}, \quad \Delta\Psi = \gamma^2 \frac{\partial^2\Psi}{\partial\tau^2} \quad \left(\tau = at, \ \gamma = \frac{a}{b}\right), \tag{4.2}$$

$$\sigma_y = (a^2 - 2b^2)\rho\Delta\Phi + 2b^2\rho\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\Psi}{\partial x\,\partial y}\right) = -\delta(x)\delta(\tau)k_0 \quad (y=0),$$

$$\tau_{xy} = b^2\rho\left(2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}\right) = 0 \quad (y = 0), \tag{4.3}$$

$$\Phi = \Psi = \frac{\partial\Phi}{\partial\tau} = \frac{\partial\Psi}{\partial\tau} = 0 \quad (\tau = 0) \tag{4.4}$$

(on a utilisé pour écrire la condition aux limites (4.3) le fait que $\delta(t) = a\delta(at) = a\delta(\tau)$, et $k_0 = k/a$).

Appliquons au système (4.2) à (4.4) la transformation de Laplace par rapport à τ et ensuite la transformation de Fourier par rapport à x, il vient

$$\frac{d^2\overline{\Phi}^*}{dy^2} = (p^2 + q^2)\overline{\Phi}^*,$$
$$\frac{d^2\overline{\Psi}^*}{dy^2} = (\gamma^2 p^2 + q^2)\overline{\Psi}^*; \tag{4.5}$$

$$(\gamma^2 - 2)p^2\overline{\Phi}^* + 2\left(\frac{d^2\overline{\Phi}^*}{dy^2} + iq\frac{d\overline{\Psi}^*}{dy}\right) = -\frac{k_0}{\mu}$$
$$(y = 0, \quad \mu = b^2\rho), \tag{4.6}$$
$$\frac{d^2\overline{\Psi}^*}{dy^2} + q^2\overline{\Psi}^* - 2qi\frac{d\overline{\Phi}^*}{dy} = 0 \quad (y = 0).$$

Ici

$$\bar{f}(p, x, y) = \int_0^\infty f(\tau, x, y)\, e^{-p\tau}\, d\tau, \quad \operatorname{Re} p > 0,$$

$$\bar{f}^*(p, q, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(p, x, y)\, e^{ixq}\, dx, \quad \operatorname{Im} q = 0 \tag{4.7}$$

$$(f = \Phi, \Psi).$$

Résolvant les équations (4.6) par rapport à $\overline{\Phi}^*$ et $\overline{\Psi}^*$ nous trouvons

$$\overline{\Phi}^* = Ae^{-\sqrt{p^2+q^2}\,y} + Be^{\sqrt{p^2+q^2}\,y},$$

$$\overline{\Psi}^* = Ce^{-\sqrt{\gamma^2 p^2+q^2}\,y} + De^{\sqrt{p^2\gamma^2+q^2}\,y}. \tag{4.8}$$

Pour choisir de façon univoque les branches des radicaux $\sqrt{p^2+q^2}$ et $\sqrt{\gamma^2p^2+q^2}$, on fait passer dans le plan q des coupures des points $\pm pi$ et $\pm \gamma pi$ vers l'infini le long des rayons $\arg q = \arg p \pm \pi/2$ (fig. 48) et on adopte $\sqrt{p^2+q^2} = p$, $\sqrt{\gamma^2p^2+q^2} = \gamma p$ pour $q = 0$. On peut alors vérifier que $\operatorname{Re}\sqrt{p^2+q^2} > 0$, $\operatorname{Re}\sqrt{\gamma^2p^2+q^2} > 0$ pour $\operatorname{Im} q = 0$, $\operatorname{Re} p > 0$ (on s'en assure en observant la variation des arguments φ_0, φ_0' et φ_1, φ_1' sur la figure 48 lorsque le point q parcourt l'axe réel).

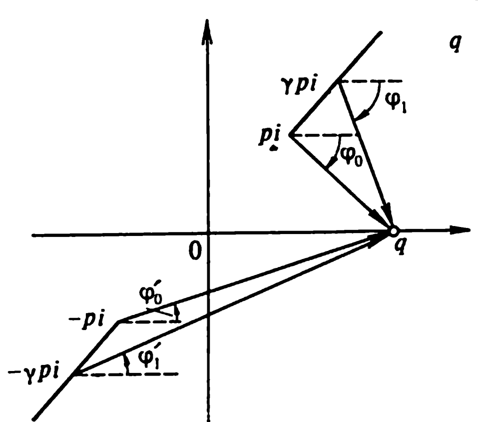


Fig. 48. Système de coupures.

Vu que le milieu était au repos lorsque $\tau < 0$ et le domaine perturbé limité, les représentations $\overline{\Phi}^*$ et $\overline{\Psi}^*$ doivent décroître lorsque $y \to +\infty$. Donc il faut poser dans (4.8) $B = D = 0$. Portant ensuite $\overline{\Phi}^*$ et $\overline{\Psi}^*$ de (4.8) dans les conditions aux limites (4.6) nous trouvons A et C:

$$A = -\frac{\gamma^2p^2 + 2q^2}{R(p, q)}\,\frac{k_0}{\mu}, \quad C = \frac{2qi\sqrt{p^2+q^2}}{R(p, q)}\,\frac{k_0}{\mu}. \tag{4.9}$$

Ici

$$R(p, q) = (\gamma^2 p^2 + 2q^2)^2 - 4q^2 \sqrt{(\gamma^2 p^2 + q^2)(p^2 + q^2)}.$$

Comme les images des composantes du vecteur déplacement $\boldsymbol{u}(u, v)$ sont liées avec celles des potentiels Φ et Ψ par les formules

$$\bar{u}^* = -iq\bar{\Phi}^* + \frac{d\bar{\Psi}^*}{dy}, \quad \bar{v}^* = \frac{d\bar{\Phi}^*}{dy} + iq\bar{\Psi}^*, \tag{4.10}$$

on a compte tenu de (4.8) à (4.10)

$$\begin{aligned} \bar{u}(p, x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iqx} \bar{u}^* \, dq, \\ \bar{v}(p, x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iqx} \bar{v}^* \, dq \, ; \end{aligned} \tag{4.11}$$

$$\bar{u}^*(p, q, y) = \frac{iqk_0}{\mu R(p, q)} [(\gamma^2 p^2 + 2q^2) e^{-\sqrt{p^2+q^2}y} - \\ -2\sqrt{(p^2 + q^2)(\gamma^2 p^2 + q^2)}\, e^{-\sqrt{p^2\gamma^2+q^2}y}],$$

$$\bar{v}^*(p, q, y) = \frac{k_0\sqrt{p^2 + q^2}}{\mu R(p, q)} [(\gamma^2 p^2 + 2q^2) e^{-\sqrt{p^2+q^2}y} - 2q^2 e^{-\sqrt{\gamma^2 p^2+q^2}y}].$$

On reconstitue les originaux en appliquant aux expressions (4.11) la transformation inverse de Laplace par rapport à p. Nous utilisons la méthode de Cagniard dans la modification de Hoop [24] dont l'essentiel est que les intégrales de la transformation inverse de Fourier par rapport à q — expressions de $\bar{u}$ et $\bar{v}$ dans (4.11) — se transforment en des intégrales ayant la forme de transformation de Laplace par rapport à τ, c'est-à-dire en les intégrales de la forme

$$\int_0^\infty f(\tau, x, y) e^{-p\tau} d\tau, \tag{4.12}$$

ce qui permet de reconstituer d'emblée l'original qui doit avoir la forme de la fonction sous l'intégrale $f(\tau, x, y)$. Afin de ramener les expressions de $\bar{u}$ et $\bar{v}$ de (4.11) à la forme (4.12), nous les

représentons de la manière suivante :

$$\bar{u} = \bar{u}_1 + \bar{u}_2, \quad \bar{v} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2; \tag{4.13}$$

$$\bar{u}_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_0 iq(\gamma^2 p^2 + 2q^2)}{\mu R(p, q)} e^{-\sqrt{p^2+q^2}y - iqx} dq,$$

$$\bar{u}_2 = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_0 2iq\sqrt{(p^2 + q^2)(\gamma^2 p^2 + q^2)}}{\mu R(p, q)} e^{-\sqrt{p^2\gamma^2+q^2}y - iqx} dq,$$

$$\bar{v}_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_0\sqrt{p^2 + q^2}}{\mu R(p, q)} (\gamma^2 p^2 + 2q^2) e^{-\sqrt{p^2+q^2}y - iqx} dq,$$

$$\bar{v}_2 = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2k_0 q^2\sqrt{p^2 + q^2}}{\mu R(p, q)} e^{-\sqrt{\gamma^2 p^2+q^2}y - iqx} dq.$$

Faisons dans (4.13) le changement de variable $q = -ips$:

$$\begin{aligned}
\bar{u}_1 &= -\frac{ik_0}{2\pi\mu} \int_L \frac{s(\gamma^2 - 2s^2)}{R(s)} e^{-p(y\sqrt{1-s^2}+sx)} ds, \\
\bar{u}_2 &= \frac{ik_0}{\pi\mu} \int_L \frac{s\sqrt{(1 - s^2)(\gamma^2 - s^2)}}{R(s)} e^{-p(y\sqrt{\gamma^2-s^2}+sx)} ds, \\
\bar{v}_1 &= -\frac{ik_0}{2\pi\mu} \int_L \frac{\sqrt{1 - s^2}(\gamma^2 - 2s^2)}{R(s)} e^{-p(y\sqrt{1-s^2}+sx)} ds, \\
\bar{v}_2 &= -\frac{ik_0}{\pi\mu} \int_L \frac{s^2\sqrt{1 - s^2}}{R(s)} e^{-p(y\sqrt{\gamma^2-s^2}+sx)} ds.
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Le contour L est montré sur la figure 49. Supposant $\sqrt{p^2 + q^2} = p\sqrt{1 - s^2}$ et $\sqrt{\gamma^2 p^2 + q^2} = p\sqrt{\gamma^2 - s^2}$ et établissant sur les branches préalablement choisies des radicaux $\sqrt{p^2 + q^2}$ et $p\sqrt{\gamma^2 - s^2}$, nous obtenons $\sqrt{1 - s^2} = 1$ et $\sqrt{\gamma^2 - s^2} = \gamma$ pour $s = 0$. Les coupures sont menées cette fois le long des demi-axes réels des points $s = \pm 1$ et $s = \pm \gamma$ jusqu'à l'infini. La fonction complexe

$$R(s) = (\gamma^2 - 2s^2)^2 + 4s^2\sqrt{(\gamma^2 - s^2)(1 - s^2)}$$

représente le premier membre de l'équation de Rayleigh (8.39), ch. V :

$$R(s) = 0,$$

admettant comme on le sait [144] dans le plan complexe s deux racines réelles : $s_{1,2} = = \pm\beta$, $\beta > \gamma$ (en particulier, pour $\lambda = \mu$ on a $\beta = \gamma(2 - 2/\sqrt{3})^{-1/2} \approx \approx \gamma/0{,}9194$). Déformons maintenant le contour d'intégration L dans (4.14) pour $\bar{u}_1$ et $\bar{v}_1$ en un contour L_1 le long duquel l'expression $y\sqrt{1-s^2}+sx$ est réelle. D'une manière analogue dans les expressions de $\bar{u}_2$ et $\bar{v}_2$ de (4.14) il faut déformer le contour L en un contour L_2 le long duquel est réelle l'expression $y\sqrt{\gamma^2 - s^2} + sx$. Déterminons tout d'abord le contour L_2. Posons

Fig. 49. Contours L et L_2.

$$y\sqrt{\gamma^2 - s^2} + sx = \tau, \tag{4.15}$$

où τ est réel et considéré comme paramètre le long du chemin d'intégration L_2 dans le plan complexe s. Nous remplacerons plus tard la variable d'intégration s par τ qui sera considérée comme le temps. C'est pour cette raison que nous avons noté τ la grandeur $y\sqrt{\gamma^2 - s^2} + sx$.

Résolvant (4.15) par rapport à s nous trouvons

$$s = \frac{\tau x \pm y\sqrt{\gamma^2(x^2+y^2) - \tau^2}}{x^2 + y^2} \quad (|\tau| < \gamma\sqrt{x^2 + y^2}), \tag{4.16'}$$

$$s = \frac{\tau x \pm iy\sqrt{\tau^2 - \gamma^2(x^2+y^2)}}{x^2 + y^2} \quad (|\tau| > \gamma\sqrt{x^2 + y^2}). \tag{4.16''}$$

Ici sont prises les valeurs arithmétiques des radicaux. Avec la variation de τ le point $s = s(\tau)$ décrit des courbes dans le plan s. Conformément à la branche choisie du radical $\sqrt{\gamma^2 - s^2}$ dans l'expression (4.15) (i.e. partant du fait que $\tau = \gamma y$ pour $s = 0$) il faut prendre le signe « — » dans (4.16') et garder les deux signes

dans (4.16″) afin d'obtenir le contour donné par l'expression (4.15) lorsque $\tau > 0$ et $x \geqslant 0$ (il suffit de considérer le cas $x \geqslant 0$, tenant compte de la parité de v et de l'imparité de u par rapport à x). Sur la figure 49 en gras est représenté dans le domaine $\operatorname{Re} s > 0$ le contour L_2 constitué du segment OM et de la courbe $N'MN$ décrite par l'expression ($x \geqslant 0$)

$$
\begin{aligned}
s &= \frac{\tau x - y\sqrt{\gamma^2(x^2+y^2)-\tau^2}}{x^2+y^2} \quad (\gamma y < \tau < \gamma\sqrt{x^2+y^2}),\\
s &= \frac{\tau x \pm iy\sqrt{\tau^2-\gamma^2(x^2+y^2)}}{x^2+y^2} \quad (\tau > \gamma\sqrt{x^2+y^2}).
\end{aligned} \tag{4.17}
$$

Les signes « + » et « — » indiquent que les courbes sont situées respectivement dans les demi-plans supérieur et inférieur. Posons dans les formules (4.17) $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ $(0 < \theta < \pi/2)$; nous avons

$$
s(\tau, r, \theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{r}(\tau\cos\theta - \sqrt{\gamma^2 r^2 - \tau^2}\sin\theta) & \text{pour } \tau < \gamma r,\\[2ex] \dfrac{1}{r}(\tau\cos\theta \pm i\sqrt{\tau^2 - \gamma^2 r^2}\sin\theta) & \text{pour } \tau > \gamma r. \end{cases}
$$

Supposant r et θ fixes nous obtenons $s \to \tau e^{\pm i\theta}/r$ lorsque $\tau \to +\infty$. C'est l'équation des asymptotes (fig. 49) vers lesquelles tend la courbe L_2 pour $\tau \to +\infty$ d'origine en $s = 0$, elles sont inclinées de $\pm\theta$ par rapport à l'axe réel. Pour $s \to \infty$ l'expression $p(y\sqrt{\gamma^2 - s^2} + sx)$ s'écrit

$$
p(y\sqrt{\gamma^2 - s^2} + sx) = \begin{cases} |p|\,|s|\,re^{i(\omega+\theta+\varphi)} & (\operatorname{Re} s < 0),\\ |p|\,|s|\,re^{i(\omega-\theta+\varphi)} & (\operatorname{Re} s > 0), \end{cases}
$$

où

$$
p = |p|\,e^{i\omega} \quad \left(|\omega| < \frac{\pi}{2}\right), \quad s = |s|\,e^{i\varphi}.
$$

Comme

$$
\min\left(-\theta, -\frac{\pi}{2} - \omega\right) \leqslant \varphi \leqslant \max\left(-\theta, -\frac{\pi}{2} - \omega\right) \quad (\operatorname{Re} s < 0),
$$

$$
\min\left(\theta, \frac{\pi}{2} - \omega\right) \leqslant \varphi \leqslant \max\left(\theta, \frac{\pi}{2} - \omega\right) \quad (\operatorname{Re} s > 0),
$$

nous obtenons

$$-\frac{\pi}{2} < \min\left(-\frac{\pi}{2} + \theta, \omega\right) \leqslant (\varphi + \theta + \omega) \leqslant$$
$$\leqslant \max\left(-\frac{\pi}{2} + \theta, \omega\right) < \frac{\pi}{2} \quad (\mathrm{Re}\, s < 0), \qquad (4.18)$$

$$-\frac{\pi}{2} < \min\left(\frac{\pi}{2} - \theta, \omega\right) \leqslant (\varphi + \omega - \theta) \leqslant$$
$$\leqslant \max\left(\frac{\pi}{2} - \theta, \omega\right) < \frac{\pi}{2} \quad (\mathrm{Re}\, s > 0).$$

Donc pour $|s| \to \infty$ la partie réelle de l'exposant dans (4.14), égal à $-p(y\sqrt{\gamma^2 - s^2} + sx)$, n'est négative que dans le domaine compris entre les courbes L et L_2. Aussi peut-on à l'aide du lemme de Jordan (cf. § 4, ch. I) transformer dans (4.14) le contour d'intégration L en le contour L_2 parcouru dans l'ordre suivant: $N'MOMN$, le segment OM de l'axe réel étant parcouru deux fois dans les directions contraires: suivant les bords inférieur et supérieur. Décomposant ensuite L_2 en les branches $\bar{l}_2 = N'MO$ et $l_2 = OMN$ symétriques par rapport à l'axe réel et faisant le changement de variable $\tau = y\sqrt{\gamma^2 - s^2} + sx$, nous ramenons successivement $\bar{u}_2$ et $\bar{v}_2$ de (4.14) à la forme suivante:

$$\bar{u}_2 = i\int_{L_2} f_2\, ds = i\int_{\bar{l}_2} f_2\, ds + i\int_{l_2} f_2\, ds = i\int_{+\infty}^{\gamma y} f_2 \frac{ds}{d\tau}\, d\tau + i\int_{\gamma y}^{+\infty} f_2 \frac{ds}{d\tau}\, d\tau =$$
$$= -\frac{2k_0}{\mu}\int_{\gamma y}^{+\infty} \mathrm{Im}\left[\frac{s\sqrt{(1 - s^2)(\gamma^2 - s^2)}}{R(s)}\frac{ds}{d\tau}\right] e^{-p\tau}\, d\tau, \qquad (4.19)$$

$$\bar{v}_2 = i\int_{L_2} F_2\, ds = i\int_{\bar{l}_2} F_2\, ds + i\int_{l_2} F_2\, ds = i\int_{+\infty}^{\gamma y} F_2 \frac{ds}{d\tau}\, d\tau +$$
$$+ i\int_{\gamma y}^{+\infty} F_2 \frac{ds}{d\tau}\, d\tau = \frac{2k_0}{\pi\mu}\int_{\gamma y}^{+\infty} \mathrm{Im}\left[\frac{s^2\sqrt{1 - s^2}}{R(s)}\frac{ds}{d\tau}\right] e^{-p\tau}\, d\tau, \qquad (4.20)$$

$$f_2 = \frac{k_0}{\pi\mu}\frac{s\sqrt{(1 - s^2)(\gamma^2 - s^2)}}{R(s)} e^{-p(y\sqrt{\gamma^2 - s^2} + sx)},$$

$$F_2 = -\frac{k_0}{\pi\mu}\frac{s^2\sqrt{1 - s^2}}{R(s)} e^{-p(y\sqrt{\gamma^2 - s^2} + sx)}.$$

Nous avons tenu compte du fait que les fonctions

$$\frac{s\sqrt{(1-s^2)(\gamma^2-s^2)}}{R(s)}\frac{ds}{d\tau}, \quad \frac{s^2\sqrt{1-s^2}}{R(s)}\frac{ds}{d\tau}$$

sont des conjuguées complexes aux points s et $\bar{s}$ de l_2 et $\bar{l}_2$ et qu'en ces points la fonction $y\sqrt{\gamma^2-s^2}$ admet des valeurs réelles égales à τ.

Notons également que dans les expressions définitives (4.19) et (4.20) de $\bar{u}_2$ et de $\bar{v}_2$ les fonctions sous l'intégrale

$$\operatorname{Im}\left[\frac{s^2\sqrt{1-s^2}}{R(s)}\frac{ds}{d\tau}\right], \quad \operatorname{Im}\left[\frac{s\sqrt{(1-s^2)(\gamma^2-s^2)}}{R(s)}\frac{ds}{d\tau}\right]$$

sont tirées de la condition que s se trouve sur le contour l_2 (fig. 50 ou 51) dont l'équation est

$$s = \frac{\tau x - y\sqrt{\gamma^2(x^2+y^2)-\tau^2}}{x^2+y^2} \quad (\gamma y < \tau < \gamma\sqrt{x^2+y^2}),$$

$$s = \frac{\tau x + iy\sqrt{\tau^2-\gamma^2(x^2+y^2)}}{x^2+y^2} \quad (\tau > \gamma\sqrt{x^2+y^2}). \tag{4.21}$$

Exactement de la même façon transformons les intégrales pour $\bar{u}_1$ et $\bar{v}_1$ prises de (4.14). Les contours L_1 et l_1 s'obtiennent

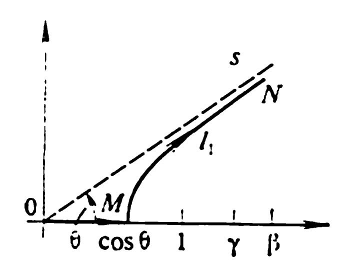


Fig. 50. Contour l_2 ($\gamma \cos\theta < 1$).

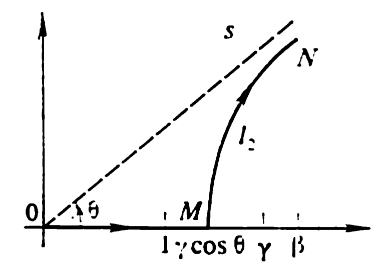


Fig. 51. Contour l_2 ($\gamma \cos\theta > 1$).

respectivement de L_2 et l_2 en posant dans (4.15) et (4.21) $\gamma = 1$. Nous avons en définitive

$$\bar{u}_1 = \frac{k_0}{\pi\mu}\int_y^\infty \operatorname{Im}\left[\frac{s(\gamma^2-2s^2)}{R(s)}\frac{ds}{d\tau}\right]e^{-p\tau}\,d\tau, \tag{4.22}$$

$$\bar{v}_1 = \frac{k_0}{\pi\mu}\int_y^\infty \operatorname{Im}\left[\frac{(\gamma^2-2s^2)\sqrt{1-s^2}}{R(s)}\frac{ds}{d\tau}\right]e^{-p\tau}\,d\tau, \tag{4.23}$$

où s est situé sur le contour l_1 (fig. 52) d'équation

$$\left.\begin{aligned} s &= \frac{\tau x - y\sqrt{(x^2+y^2)-\tau^2}}{x^2+y^2} \quad (y < \tau < \sqrt{x^2+y^2}), \\ s &= \frac{\tau x + iy\sqrt{\tau^2-(x^2+y^2)}}{x^2+y^2} \quad (\tau > \sqrt{x^2+y^2}). \end{aligned}\right\} \tag{4.24}$$

Fig. 52. Contour l_1.

Il ressort des formules (4.22), (4.23) qu'en réalité les expressions sous les intégrales s'annulent pour des s réels < 1, i.e. effectivement pour des $s < \cos\theta$ ou, pour la variable τ, pour $\tau < r$. Ceci nous permet de récrire les expressions (4.22), (4.23) sous la forme

$$\left.\begin{aligned} \bar{u}_1 &= \frac{k_0}{\pi\mu}\int_0^\infty \operatorname{Im}\left[\frac{s(\gamma^2-2s^2)}{R(s)}\frac{ds}{d\tau}\right] H(\tau-r)\,e^{-p\tau}\,d\tau, \\ \bar{v}_1 &= \frac{k_0}{\pi\mu}\int_0^\infty \operatorname{Im}\left[\frac{(\gamma^2-2s^2)\sqrt{1-s^2}}{R(s)}\frac{ds}{d\tau}\right] H(\tau-r)\,e^{-p\tau}\,d\tau \\ &\left(H(x) = \begin{cases} 1, & x>0, \\ 0, & x<0, \end{cases}\right), \end{aligned}\right\} \tag{4.25}$$

où la fonction s est donnée par (4.24).

Considérant d'une manière analogue les cas $\gamma\cos\theta < 1$ (fig. 50) et $\gamma\cos\theta > 1$ (fig. 51) nous obtenons

$$\begin{aligned} \bar{u}_2 = -\frac{2k_0}{\pi\mu}\int_0^\infty \operatorname{Im}\left[\frac{s\sqrt{(1-s^2)(\gamma^2-s^2)}}{R(s)}\frac{ds}{dt}\right] \times \\ \times \begin{Bmatrix} H(\tau - r\gamma) \\ H(\tau - x - y\sqrt{\gamma^2-1}) \end{Bmatrix} e^{-p\tau}\,d\tau, \end{aligned} \tag{4.26}$$

$$\begin{aligned} \bar{v}_2 = \frac{2k_0}{\pi\mu}\int_0^\infty \operatorname{Im}\left[\frac{s^2\sqrt{1-s^2}}{R(s)}\frac{ds}{dt}\right] \times \\ \times \begin{Bmatrix} H(\tau - r\gamma) \\ H(\tau - x - y\sqrt{\gamma^2-1}) \end{Bmatrix} e^{-p\tau}\,d\tau, \end{aligned}$$

les lignes supérieure et inférieure dans les expressions de $\bar{u}_2$ et $\bar{v}_2$ se rapportent respectivement aux cas $\gamma \cos \theta < 1$ et $\gamma \cos \theta > 1$, et la fonction s se détermine par (4.21).

Les formules (4.25) et (4.26) présentent les quantités $\bar{u}_1, \bar{v}_1, \bar{u}_2$ et $\bar{v}_2$ sous la forme d'intégrales qui ne sont autre que la transformation de Laplace par rapport à τ des fonctions réelles figurant sous les intégrales. Donc, ces fonctions sont les originaux cherchés.

Appliquant à (4.25), (4.26) la transformation inverse de Laplace par rapport à p, nous obtenons définitivement

$$u = u_1 + u_2,$$

$$u_1 = \frac{k_0}{\pi\mu} \operatorname{Im}\left[\frac{s(\gamma^2 - 2s^2)}{R(s)} \frac{ds}{d\tau}\right] H(\tau - r), \tag{4.27}$$

$$u_2 = -\frac{2k_0}{\pi\mu} \operatorname{Im}\left[\frac{s\sqrt{(1-s^2)(\gamma^2 - s^2)}}{R(s)} \frac{ds}{d\tau}\right] \begin{Bmatrix} H(\tau - r\gamma) \\ H(\tau - x - y\sqrt{\gamma^2 - 1}) \end{Bmatrix};$$

$$v = v_1 + v_2,$$

$$v_1 = \frac{k_0}{\pi\mu} \operatorname{Im}\left[\frac{(\gamma^2 - 2s^2)\sqrt{1 - s^2}}{R(s)} \frac{ds}{dt}\right] H(\tau - r), \tag{4.28}$$

$$v_2 = \frac{2k_0}{\pi\mu} \operatorname{Im}\left[\frac{s^2\sqrt{1 - s^2}}{R(s)} \frac{ds}{dt}\right] \begin{Bmatrix} H(\tau - r\gamma) \\ H(\tau - x - y\sqrt{\gamma^2 - 1}) \end{Bmatrix},$$

où s dans les formules pour u_1 et v_1 se donne par les expressions (4.24) et dans les formules pour u_2 et v_2 par les expressions (4.21).

Considérons les fronts d'onde dans le domaine $y \geqslant 0$ (fig. 53). Les expressions u_1 et v_1 traduisent l'apport de l'onde longitudinale P avec comme équation de front $r = \tau$, et les expressions u_2 et v_2 sont l'apport de l'onde transversale S constituée d'une onde à front circulaire $r = \tau\gamma^{-1}$ et d'une onde frontale transversale à front rectiligne $\tau - x - y\sqrt{\gamma^2 - 1} = 0$. L'onde frontale transversale S est engendrée par l'onde progressive longitudinale P lors de son interaction avec la surface libre. Le front de l'onde frontale transversale est tangent au cercle $r = \tau\gamma^{-1}$ au point $\theta = \theta_0$, où $\cos \theta_0 = \gamma^{-1}$. De ce fait l'onde frontale transversale existe pour $\theta < \theta_0$. Notons que le vecteur des déplacements admet une singularité d'ordre $-1/r$ sur les fronts des ondes longitudinale ($r = \tau$)

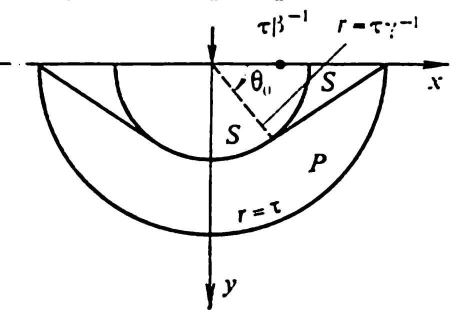


Fig. 53. Schéma des fronts d'onde.

et transversale ($r = \tau\gamma^{-1}$). Sur le front de l'onde transversale $r = \tau\gamma^{-1}$ qui suit l'onde frontale (c'est-à-dire pour $\theta < \theta_0$) cette singularité apparaît lorsqu'on s'approche du front de n'importe quel côté. Une singularité se manifeste sur la surface libre au point $x = \tau/\beta$ courant à la vitesse d'ondes de Rayleigh. Cette singularité est de l'ordre de -1 et n'apparaît que sur la surface libre. Son apparition est due à la présence du zéro $s = \beta$ dans l'expression de $R(s)$ aux dénominateurs des fonctions u et v.

§ 5. Problème dynamique plan sur l'enfoncement d'une étampe lisse

Les problèmes dynamiques de l'élasticité auxquels la méthode de Wiener-Hopf (cf. § 1, ch. I, p. 4) a été appliquée pour la première fois sont le problème stationnaire de diffraction sur une coupure semi-infinie à bords libres, ainsi que le problème lié à l'étude de l'état de contrainte qui se crée au cours de la formation brusque d'une fissure semi-infinie. Dans ces problèmes on donne des conditions aux limites mixtes dans deux intervalles semi-infinis et une condition aux limites commune à ces deux intervalles. Nous illustrerons l'application de cette méthode sur l'exemple de la résolution du problème plan concernant l'enfoncement sans frottement d'une étampe [30]. Pour plus de simplicité nous nous limiterons au cas d'une étampe semi-infinie.

Supposons que sur un intervalle semi-infini de la frontière $x \geqslant 0$ du demi-plan élastique $y \geqslant 0$ à l'instant $t = 0$ une étampe commence à s'enfoncer sans frottement. Sa loi du mouvement est donnée par l'équation $y = f(x, t)$, où $f(x, t)$ est une fonction à dérivée continue. Tenant compte du fait qu'avant le début du mouvement le milieu est au repos, nous avons pour déterminer le vecteur déplacement $\boldsymbol{u}$ les conditions aux limites et initiales suivantes :

$$\begin{gathered} \tau_{xy} = 0 \quad (-\infty < x < \infty,\ y = 0), \\ \sigma_y = 0 \quad (x < 0,\ y = 0), \\ v = f(x, t) \quad (x \geqslant 0,\ y = 0), \\ \boldsymbol{u} = \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} = 0 \quad (t = 0). \end{gathered} \tag{5.1}$$

Utilisant les représentations (5.50), (5.53) du chapitre III pour le vecteur $\boldsymbol{u}(u, v)$:

$$\boldsymbol{u} = \operatorname{grad} \Phi + \operatorname{rot} (\Psi \boldsymbol{k}), \tag{5.2}$$

nous ramenons le problème au système suivant d'équations pour les potentiels Φ et Ψ :

$$\Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial\tau^2}, \quad \Delta\Psi = \gamma^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial\tau^2} \quad (\tau = at, \quad \gamma = a/b) \tag{4.2}$$

pour les conditions aux limites et initiales

$$\tau_{xy} = b^2\rho\left(2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}\right) = 0$$
$$(y = 0, \ -\infty < x < \infty), \tag{5.3}$$

$$\sigma_y = (a^2 - 2b^2)\rho\Delta\Phi + 2b^2\rho\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\Psi}{\partial x\,\partial y}\right) = 0$$
$$(y = 0, \ x < 0), \tag{5.4}$$

$$v = \frac{\partial\Phi}{\partial y} - \frac{\partial\Psi}{\partial x} = f(x, \tau) \quad (y = 0, \ x \geqslant 0), \tag{5.5}$$

$$\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial\tau} = \Psi = \frac{\partial\Psi}{\partial\tau} = 0 \quad (\tau = 0). \tag{5.6}$$

Afin d'assurer l'unicité de la solution du problème il faut en outre imposer une restriction au comportement du vecteur déplacement au voisinage du bord de l'étampe $x = 0$:

$$u = C + O(r^\varepsilon) \quad (\varepsilon > 0, \ r \to 0, \ C \equiv C(\tau)). \tag{5.7}$$

Nous avons terminé la position du problème.

Appliquant la transformation de Laplace par rapport à τ et ensuite la transformation bilatérale de Laplace par rapport à x aux équations (4.2) et aux conditions aux limites (5.3), (5.4), (5.5) nous obtenons le système suivant d'équations du mouvement et de conditions aux limites pour $\overline{\Phi}^*$ et $\overline{\Psi}^*$:

$$\frac{d^2\overline{\Phi}^*}{dy^2} = (p^2 - s^2)\overline{\Phi}^*,$$
$$\frac{d^2\overline{\Psi}^*}{dy^2} = (\gamma^2p^2 - s^2)\overline{\Psi}^*, \tag{5.8}$$

$$2s\frac{d\overline{\Phi}^*}{dy} + \frac{d^2\overline{\Phi}^*}{dy^2} - s^2\overline{\Psi}^* = 0 \quad (y = 0), \tag{5.9}$$

$$\overline{\sigma}_y^+ = (\gamma^2 - 2)p^2\overline{\Phi}^* + 2\left(\frac{d^2\overline{\Phi}^*}{dy^2} - s\frac{d\overline{\Psi}^*}{dy}\right) \quad (y = 0), \tag{5.10}$$

$$\bar{v}^- + \bar{v}^+ = \frac{d\overline{\Phi}^*}{dy} - s\overline{\Psi}^* \quad (y = 0). \tag{5.11}$$

On a noté ici

$$\bar{\sigma}_y^+ = \frac{1}{\mu}\int_0^\infty e^{-sx}\,dx\int_0^\infty \sigma_y e^{-p\tau}\,d\tau,$$

$$\bar{v}^- = \int_{-\infty}^0 e^{-sx}\,dx\int_0^\infty v e^{-p\tau}\,d\tau,$$

$$\bar{v}^+ = \int_0^\infty e^{-sx}\,dx\int_0^\infty f(x, \tau)\,e^{-p\tau}\,d\tau \quad (\operatorname{Re} p > 0), \tag{5.12}$$

$$\bar{F} = \int_0^\infty e^{-p\tau}F\,d\tau, \quad \bar{F}^* = \int_{-\infty}^\infty e^{-sx}\bar{F}\,dx$$

$$(F = \Phi, \Psi),$$

et les fonctions $\bar{\sigma}_y^+$ et $\bar{v}^-$ sont inconnues.

Déterminons dans le plan s le domaine de convergence des intégrales (5.12). Comme les perturbations sont pour le moins bornées pour $x \to +\infty$ et sont absentes pour $x < 0$ lorsque $\tau + x < 0$, alors

$$\bar{F} = \begin{cases} O(1), & x \to +\infty, \\ O(e^{px}), & x \to -\infty. \end{cases}$$

Ceci étant, l'intégrale $\bar{F}^*$ converge et est analytique dans le domaine $0 < \operatorname{Re} s < \operatorname{Re} p$. Pour cette même raison les intégrales $\bar{\sigma}_y^+$ et $\bar{v}^-$ convergent aussi et sont analytiques respectivement dans les domaines $\operatorname{Re} s > 0$ et $\operatorname{Re} s < \operatorname{Re} p$. Les intégrales (5.8) à (5.12) sont donc analytiques dans $0 < \operatorname{Re} s < \operatorname{Re} p$.

Résolvant l'équation (5.8) et gardant les solutions décroissant lorsque $y \to \infty$, nous trouvons

$$\bar{\Phi}^* = Ae^{-\sqrt{p^2-s^2}\,y}, \quad \bar{\Psi}^* = Be^{-\sqrt{\gamma^2p^2-s^2}\,y}. \tag{5.13}$$

Afin de fixer une branche déterminée des radicaux $\sqrt{p^2 - s^2}$ et $\sqrt{\gamma^2p^2 - s^2}$ on fait passer dans le plan s des coupures allant des points $s = \pm p$ et $s = \pm p\gamma$ à l'infini le long des rayons $s = \arg p$ et $s = \pi + \arg p$ (fig. 54) et on suppose que pour $s = 0$ sont vérifiées les égalités : $\sqrt{p^2 - s^2} = p$, $\sqrt{\gamma^2p^2 - s^2} = \gamma p$. On a dans

ce cas

$$\operatorname{Re}\sqrt{p^2 - s^2} > 0, \quad \operatorname{Re}\sqrt{\gamma^2 p^2 - s^2} > 0 \quad (0 < \operatorname{Re} s < \operatorname{Re} p).$$

Portant l'expression (5.13) dans les conditions aux limites (5.9) à (5.11) nous obtenons trois équations algébriques pour déterminer

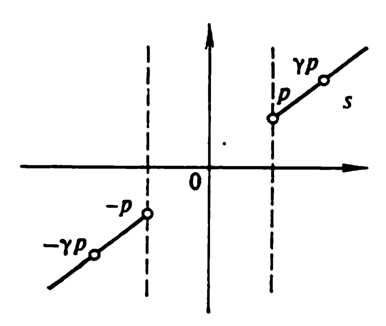


Fig. 54. Système de coupures.

quatre inconnues : A, B, $\bar{\sigma}_y^+$ et $\bar{\tau}^-$:

$$-2s\sqrt{p^2 - s^2}A + (\gamma^2 p^2 - 2s^2)B = 0,$$

$$(\gamma^2 p^2 - 2s^2)A + 2s\sqrt{\gamma^2 p^2 - s^2}B = \bar{\sigma}_y^+ ;$$

$$-\sqrt{p^2 - s^2}A - sB = \bar{v}^- + \bar{v}^+.$$

Eliminant A et B, nous aboutissons à l'équation suivante entre $\bar{\sigma}_y^+$ et $\bar{\tau}^-$:

$$\frac{\gamma^2 p^2 \sqrt{p^2 - s^2}}{R(p, s)} \bar{\sigma}_y^+ + \bar{v}^+ + \bar{v}^- = 0 \quad (0 < \operatorname{Re} s < \operatorname{Re} p), \tag{5.14}$$

$$R(p, s) = (\gamma^2 p^2 - 2s^2)^2 + 4s^2\sqrt{(\gamma^2 p^2 - s^2)(p^2 - s^2)}.$$

Examinons en détail les propriétés des fonctions figurant dans cette équation. A l'aide de (5.7) nous obtenons que les transformées de Laplace (par rapport à τ) des fonctions σ_y et v pour $y = 0$ et $x \to 0$ se comportent comme suit :

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_y &= O(x^{\varepsilon}) \quad (\varepsilon > -1, \ x \to +0), \\ \bar{\tau} &= O(1) \quad (x \to -0). \end{aligned} \tag{5.15}$$

Aussi, partant des propriétés de la transformation de Laplace, nous obtenons que la fonction $\bar{\sigma}_y^+$, analytique dans le domaine $\operatorname{Re} s > 0$, tend vers zéro dans ce domaine lorsque $s \to \infty$ et la fonction $\bar{\tau}^-$, analytique dans le domaine $\operatorname{Re} s < \operatorname{Re} p$, décroît lorsque $s \to \infty$ ($\operatorname{Re} s < \operatorname{Re} p$) pour le moins comme s^{-1}.

Pour nous faire une idée du comportement de la fonction $K(p, s) \equiv \gamma^2 p^2 \sqrt{p^2 - s^2}/R(p, s)$ considérons l'expression $R(p, s)$. On voit que

$$R(p, s) = p^4 R\left(\frac{s}{p}\right) = p^4 R(q) \quad \left(q = \frac{s}{p}\right),$$

où $R(q)$ est le premier membre de l'équation de Rayleigh (cf. (8.39), ch. V); c'est une fonction analytique univoque dans le plan q à coupures $[-\gamma, -1]$, $[1, \gamma]$, où elle admet deux zéros réels : $q_{1,2} = \pm\beta$ $(\beta > \gamma)$. On a en outre

$$R(q) = -2(\gamma^2 - 1)q^2 + O(1) \quad (q \to \infty).$$

Par conséquent, la fonction $K(p, s)$, analytique dans la bande $|\operatorname{Re} s| < \operatorname{Re} p$, n'y admet pas de zéros et décroît comme s^{-1} lorsque $s \to \infty$.

A l'aide de la formule de Cauchy on peut représenter $K(p, s)$ dans la bande $|\operatorname{Re} s| < \operatorname{Re} p$ sous la forme

$$K(p, s) = -\frac{\gamma^2\sqrt{1-q^2}}{2p(\gamma^2-1)(q^2-\beta^2)}\, e^{-\ln\left[\frac{R(q)}{2(1-\gamma^2)(q^2-\beta^2)}\right]} =$$

$$= K_+(p, s)\, K_-(p, s)\, \frac{\gamma^2}{2p(1-\gamma^2)}, \tag{5.16}$$

$$K_+(p, s) \equiv K_+(q) = \frac{\sqrt{1+q}}{q+\beta}\, e^{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0} \ln\left[\frac{R(z)}{2(1-\gamma^2)(z^2-\beta^2)}\right]\frac{dz}{z-q}},$$

$$K_-(p, s) \equiv K_-(q) = \frac{\sqrt{1-q}}{q-\beta}\, e^{-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1} \ln\left[\frac{R(z)}{2(1-\gamma^2)(z^2-\beta^2)}\right]\frac{dz}{z-q}}.$$

Les contours L_0 et L_1 sont montrés sur la figure 55 ; la branche du logarithme est choisie de telle sorte que pour $z = 0$ l'argument du logarithme soit nul (notons que la substitution $q = s/p$ opère une contraction du plan s dans un rapport $|p|$ et une rotation d'un angle $-\arg p$). De ce fait, la bande $|\operatorname{Re} s| < \operatorname{Re} p$ (de la figure 54) se transforme en une bande inclinée dans le plan q (de la figure 55).

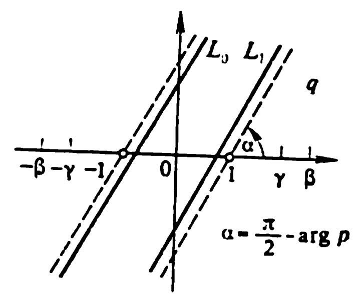


Fig. 55. Contours L_0 et L_1.

Les fonctions sous l'intégrale de (5.16) sont analytiques dans le plan partout en dehors des coupures $[-\gamma, -1]$, $[1, \gamma]$ et décroissent comme $O(z^{-3})$ lorsque $z \to \infty$. Déformant alors les contours

L_0 et L_1 respectivement le long des demi-axes réels négatif et positif et tenant compte de ce que la fonction $\ln[R(z)2^{-1}(1+\gamma^2)^{-1}(z^2-\beta^2)^{-1}]$ prend sur les bords supérieur et inférieur des coupures $[-\gamma, -1]$ et $[1, \gamma]$ des valeurs conjuguées complexes et de ce que

$$\ln(x+iy) = \ln(re^{i\theta}) = \ln r + i\theta = \ln\sqrt{x^2+y^2} + i \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x},$$

nous obtenons pour $K_+(p, s)$ et $K_-(p, s)$ les expressions suivantes :

$$K_+(p, s) \equiv K_+(q) = \frac{\sqrt{1+q}}{q+\beta}\, e^{-\frac{1}{\pi}\int_{-\gamma}^{-1} g(z)\frac{dz}{z-q}},$$
$$K_-(p, s) \equiv K_-(q) = \frac{\sqrt{1-q}}{q-\beta}\, e^{\frac{1}{\pi}\int_{1}^{\gamma} g(z)\frac{dz}{z-q}}, \tag{5.17}$$
$$g(z) = \operatorname{arc\,tg}\frac{4z^2\sqrt{(\gamma^2-z^2)(z^2-1)}}{(\gamma^2-2z^2)^2},$$

le radical dans l'expression de $g(z)$ étant arithmétique.

La fonction $K_+(q)$ est analytique en dehors de la coupure le long de l'axe réel $-\infty < q \leqslant -1$ et n'y admet pas de zéros sauf en $q = \infty$; $K_-(q)$ est analytique en dehors de la coupure le long de l'axe réel $1 \leqslant q < \infty$ et n'y admet pas de zéros, sauf en $q = \infty$. A l'infini $K_+(q)$ et $K_-(q)$ tendent vers zéro comme $q^{-1/2}$. Ceci implique l'analyticité de $K_+(p, s)$ dans le plan s en dehors de la coupure s'en allant du point $s = -p$ dans l'infini le long du rayon $\arg s = \arg p + \pi$, et de la fonction $K_-(p, s)$ en dehors de la coupure s'en allant du point $s = p$ dans l'infini le long du rayon $\arg s = \arg p$. Les fonctions $K_+(p, s)$ et $K_-(p, s)$ n'admettent pas de zéros aux points $s \notin \arg s$, tandis qu'en $s = \infty$ elles tendent vers zéro comme $s^{-1/2}$. Utilisant (5.16) récrivons (5.14) sous la forme

$$\frac{\bar{\sigma}_y^+ K_+(q, s)\gamma^2}{2p(\gamma^2-1)} - \frac{\bar{v}^+}{K_-(p, s)} = \frac{\bar{v}^-}{K_-(p, s)} \tag{5.18}$$
$$(0 < \operatorname{Re} s < \operatorname{Re} p).$$

Le deuxième terme du premier membre de (5.18) est évidemment analytique dans la bande $0 < \operatorname{Re} s < \operatorname{Re} p$ et tend vers zéro comme $s^{-1/2}$ lorsque $s \to \infty$. Aussi peut-on à l'aide des intégrales du type Cauchy représenter celui-ci sous la forme

$$\frac{\bar{v}^+}{K_-(p, s)} = N_+(p, s) + N_-(p, s), \tag{5.19}$$

où l'on a noté

$$N_+(p, s) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{l_1} \frac{\bar{v}^+(z)\,dz}{K_-(p, z)(z-s)},$$

$$N_-(p, s) = \frac{1}{2\pi i}\int_{l_2} \frac{\bar{v}^+(z)\,dz}{K_-(p, z)(z-s)}.$$

Les contours l_1 et l_2 sont des droites parallèles à l'axe imaginaire passant à l'intérieur de la bande $0 < \operatorname{Re} s < \operatorname{Re} p$, à proximité de ses bords gauche et droit.

On peut montrer que $N_+(p, s)$ est analytique dans le demi-plan $\operatorname{Re} s > 0$ et tend vers zéro pour le moins comme s^{-1} lorsque $s \to \infty$ ($\operatorname{Re} s > 0$), alors que $N_-(p, s)$ est analytique dans le domaine $\operatorname{Re} s < \operatorname{Re} p$ et tend vers zéro comme $s^{-1/2}$ lorsque $s \to \infty$ ($\operatorname{Re} s < < \operatorname{Re} p$).

Récrivons (5.18) sous la forme

$$\frac{\bar{\sigma}_y^+ K_-(p, s)\gamma^2}{2p(\gamma^2-1)} - N_+(p, s) = N_-(p, s) + \frac{\bar{v}^-}{K_-(p, s)} \tag{5.20}$$

$$(0 < \operatorname{Re} s < \operatorname{Re} p).$$

Connaissant le comportement des fonctions $\bar{\sigma}_y^+$, $K_+(p, s)$, $N_+(p, s)$, $K_-(p, s)$, $N_-(p, s)$, $\bar{v}^-$ nous concluons que le second membre de (5.20) est régulier dans $\operatorname{Re} s > 0$ et décroit dans ce demi-plan plus rapidement que $s^{-1/2}$ lorsque $s \to \infty$, alors que le premier membre est régulier dans $\operatorname{Re} s < \operatorname{Re} p$ et y décroit pour le moins comme $s^{-1/2}$ lorsque $s \to \infty$. De l'égalité de ces membres dans la bande $0 < \operatorname{Re} s < \operatorname{Re} p$ découle que dans le plan de la variable complexe s existe une seule fonction entière $F(s)$ égale dans le domaine $\operatorname{Re} s > 0$ au second membre de l'équation (5.20) et dans le domaine $\operatorname{Re} s < \operatorname{Re} p$, à son premier membre. Cette fonction étant bornée, en vertu du théorème de Liouville [88] $F(s) \equiv \text{const}$. Mais comme $F(s) \to 0$ lorsque $s \to \infty$, cette constante est égale à zéro, i.e. $F(s) \equiv 0$. Compte tenu de ce que dans les demi-plans $\operatorname{Re} s > 0$ et $\operatorname{Re} s < \operatorname{Re} p$ la fonction $F(s)$ se représente respectivement par les second et premier membres de (5.20), nous en déduisons

$$\frac{\bar{\sigma}_y^+ K_+(p, s)}{2p(\gamma^2-1)} - N_+(p, s) = 0 \quad (\operatorname{Re} s > 0), \tag{5.21}$$

$$N_-(p, s) + \frac{\bar{v}^-}{K_-(p, s)} = 0 \quad (\operatorname{Re} s < \operatorname{Re} p). \tag{5.22}$$

D'où nous tirons les fonctions cherchées $\bar{\sigma}_y^+$ et $\bar{v}^-$:

$$\bar{\sigma}_y^+ = \frac{2p(\gamma^2-1)}{\gamma^2 K_+(p, s)} N_+(p, s) \quad (\text{Re}\, s > 0), \tag{5.23}$$

$$\bar{v}^- = -K_-(p, s) N_-(p, s) \quad (\text{Re}\, s < \text{Re}\, p). \tag{5.24}$$

Les propriétés des fonctions $N_\pm(p, s)$ et $K_\pm(p, s)$ garantissent la régularité des fonctions $\bar{\sigma}_y^+$ et $\bar{v}^-$ et le comportement exigé à l'infini.

On trouve les originaux par les transformations inverses de Laplace par rapport à s et p :

$$\sigma_y(\tau, x, 0) = \frac{\mu(\gamma^2-1)}{\pi i \gamma^2} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{p\tau} p\, dp \, \frac{1}{2\pi i} \int_{d-i\infty}^{d+i\infty} \frac{N_+(p, s)}{K_+(p, s)} e^{sx} ds \quad (x > 0), \tag{5.25}$$

$$v(\tau, x, 0) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{p\tau} dp \, \frac{1}{2\pi i} \int_{d-i\infty}^{d+i\infty} N_-(p, s) K_-(p, s) e^{sx} ds \tag{5.26}$$

$$(x < 0, \quad c > d > 0).$$

Examinons la solution (5.25), (5.26) pour le cas concret où $f(x, \tau) = f(\tau)$ (fig. 56). On a $\bar{v}^+ = \bar{f}(p)/s$ et comme $K_\pm(p, s) = K_\pm(q)$, on obtient de (5.19)

$$N_+(p, s) = \frac{\bar{f}(p)}{K_-(0)s}, \quad N_-(p, s) = \frac{\bar{f}(p)}{s} \left[\frac{1}{K_-(q)} - \frac{1}{K_-(0)} \right]. \tag{5.27}$$

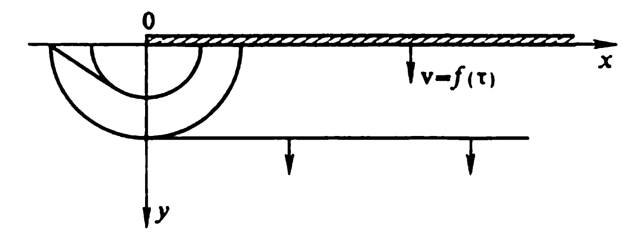


Fig. 56. Schéma des fronts d'onde.

Par suite, les formules (5.26) deviennent

$$\sigma_y(\tau, x, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} p\bar{f}(p) \bar{M}_+(px) e^{p\tau} dp \quad (x > 0),$$

$$v(\tau, x, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \bar{f}(p) \bar{M}_-(px) e^{p\tau} dp \quad (x < 0), \tag{5.28}$$

où l'on a noté

$$\bar{M}_+(px) = \frac{\mu(\gamma^2-1)}{\gamma^2 K_-(0)} \frac{1}{\pi i} \int_{d-i\infty}^{d+i\infty} \frac{e^{sx}ds}{K_+(q)s} =$$

$$= \frac{\mu(\gamma^2-1)}{\gamma^2 K_-(0)\pi i} \int_{L_1} \frac{e^{pxq}dq}{K_+(q)q} \quad (x > 0), \qquad (5.29)$$

$$\bar{M}_-(px) = \frac{1}{2\pi i} \int_{d-i\infty}^{d+i\infty} \left[\frac{K_-(q)}{K_-(0)} - 1\right] \frac{e^{sx}ds}{s} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \left[\frac{K_-(q)}{K_-(0)} - 1\right] \frac{e^{pxq}}{q} dq \quad (x < 0).$$

Déformant le contour L_1 le long de la coupure $[1, +\infty)$ dans l'expression de $\bar{M}_-(px)$ et le long de la coupure $(-\infty, -1]$ dans celle de $\bar{M}_+(px)$ (et remplaçant ensuite q par $-q$ dans $\bar{M}_+(px)$) nous ramenons (5.29) à la forme

$$\frac{\gamma K_-(0)}{2\mu(\gamma^2-1)} \bar{M}_+(px) = \frac{1}{K_+(0)} - \frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{\beta - q}{\sqrt{q-1}} e^{-\frac{1}{\pi}\int_1^{\gamma} g(z)\frac{dz}{z-q} - pxq} \times$$

$$\times \{1 + [\cos g(q) - 1]H(\gamma - q)\} \frac{dq}{q} \quad (x > 0), \qquad (5.30)$$

$$\bar{M}_-(px) = -\frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{\sqrt{q-1}}{q-\beta} e^{\frac{1}{\pi}\int_1^{\gamma} g(z)\frac{dz}{z-q} + pxq} \times$$

$$\times \{1 + [\cos g(q) - 1]H(\gamma - q)\} \frac{dq}{q} \quad (x < 0).$$

Il convient ici de comprendre l'intégrale de 1 à ∞ dans $\bar{M}_-(px)$ et l'intégrale de 1 à γ (pour $1 < q < \gamma$) dans $\bar{M}_\pm(px)$ au sens de la valeur principale de l'intégrale de Cauchy ; les radicaux de (5.30) sont partout arithmétiques. Notons aussi que $K_-(0) = -K_+(0) = -\gamma^{-2}\sqrt{2(\gamma^2-1)}$.

Compte tenu de (5.30), les formules (5.28) donnent

$$\sigma_y(\tau, x, 0) = -\mu\gamma^2 f'(\tau) +$$

$$+ H\left(\frac{\tau}{x} - 1\right)\frac{\mu\sqrt{2(\gamma^2 - 1)}}{\pi}\frac{\partial}{\partial\tau}\int_1^{\tau/x}\frac{\beta - q}{\sqrt{q-1}}e^{-\frac{1}{\pi}\int_1^{\gamma}\frac{g(z)dz}{z-q}} \times$$

$$\times \{1 + [\cos g(q) - 1]H(\gamma - q)\}f(\tau - xq)\frac{dq}{q} \quad (x > 0), \quad (5.31)$$

$$v(\tau, x, 0) = \frac{\gamma^2 H\left(-1 - \frac{\tau}{x}\right)}{\pi\sqrt{2(\gamma^2 - 1)}}\int_1^{-\tau/x}\frac{\sqrt{q-1}}{q - \beta}e^{\frac{1}{\pi}\int_1^{\gamma}\frac{g(z)dz}{z-q}} \times$$

$$\times \{1 + [\cos g(q) - 1]H(\gamma - q)\}f(\tau + xq)\frac{dq}{q} \quad (x < 0), \quad (5.32)$$

la dérivée $f'(\tau)$ figurant dans (5.31) comme une dérivée distributionnelle. Dans le cas particulier où $f(\tau) = H(\tau)$ nous avons $f'(\tau) = \delta(t)$.

A l'aide des expressions (5.31), (5.32) examinons quelques particularités du problème concernant une étampe semi-infinie. Considérons tout d'abord l'expression du déplacement vertical sur la frontière $y = 0$, $x < 0$. Pour $\tau + x < 0$ nous avons $v = 0$, ce qui correspond à des conditions initiales nulles. Ici $\tau + x = 0$ est l'équation du front d'onde longitudinale sur la partie libre de la frontière $y = 0$. Sur ce front $v = 0$, $\frac{\partial v}{\partial\tau} = 0$, $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$. De même que sur le front de l'onde longitudinale, sur le front de l'onde transversale (pour $y = 0$) $\tau + \gamma x = 0$, la fonction $v(\tau, x, 0)$ ainsi que $\partial v/\partial\tau$ et $\partial v/\partial x$ sont continues. Il est aisé de voir de la formule (5.32) que la fonction $v(\tau, x, 0)$ admet pour $\tau = \beta x$ une singularité logarithmique, autrement dit qu'on a dans le déplacement vertical, sur la partie libre de la frontière, une discontinuité logarithmique qui se propage à la vitesse d'ondes de Rayleigh. On peut également vérifier que $v(\tau, x, 0)$ est continue au point $x = 0$, mais que $\partial v/\partial x$ tend vers l'infini pour $x \to -0$ comme

$$\frac{\partial v}{\partial x} \sim M(\tau)(-x)^{-1/2}.$$

La formule (5.31) nous donne pour la contrainte $\sigma_y(\tau, x, 0)$ sous l'étampe ($x > 0$) :

$$\sigma_y(\tau, x, 0) = -\mu\gamma^2 f'(\tau) \quad \text{pour} \quad \tau - x < 0,$$

c'est-à-dire qu'aux points où ne sont pas arrivées les ondes réfléchies sur le bord $x = 0$, la contrainte est celle qu'on aurait si sur toute la frontière on avait la condition $\tau_{xy} = 0$, $v = f'(\tau)$, ce à quoi on devait s'attendre, étant donné le caractère hyperbolique des équations dynamiques de la théorie de l'élasticité. A l'instant $\tau = x$, au point x sous l'étampe arrive un front d'onde longitudinale ; sur ce front $\sigma_y = 0$ si $f(0) = 0$ (on note ici $f(0) = \lim_{\tau \to +0} f(\tau)$), et $\sigma_y \to \infty$ comme $\varphi(x)/\sqrt{\tau - x}$ si $f(0) \neq 0$; par ailleurs, lorsque $x \to +\infty$, $\varphi(x)$ tend vers zéro comme x^{-1}. On dégage également dans l'expression (5.31) un front d'onde transversale $\tau - \gamma x = 0$. Sous l'étampe ($x > 0$) on a justement les conditions qu'il faut pour qu'une onde longitudinale (resp. transversale), réfléchie sur la frontière, engendre seule une onde longitudinale (resp. transversale), de sorte que pour $\tau/\gamma < x < \tau$ la contrainte σ_y est la contrainte dans l'onde longitudinale (cf. fig. 56) et pour $0 < x < \tau$, la contrainte globale dans les ondes longitudinale et transversale. On a au point $x = 0$, comme dans la solution du problème statique correspondant, une singularité intégrable du type $x^{-1/2}$:

$$\sigma_y = -\frac{\mu\sqrt{2(\gamma^2 - 1)}}{\pi\sqrt{x}} \frac{\partial}{\partial\tau} \int_0^\tau \frac{f(q)dq}{\sqrt{\tau - q}} \quad (x \to 0).$$

En conclusion notons que dans le cas d'une étampe de largeur finie ($0 < x < l$) la solution peut être obtenue moyennant la superposition des solutions relatives à des étampes semi-infinies. Ce résultat est basé sur le fait que les équations de l'élasticité dynamique sont de caractère hyperbolique et donc que les perturbations se propagent à une vitesse finie. Aussi, tant que les ondes de diffraction nées au bord opposé n'ont pas atteint le domaine considéré, on peut utiliser la solution pour une étampe semi-infinie.

§ 6. Problème sur la propagation d'une fissure à vitesse variable

Du point de vue mathématique, les problèmes plans concernant la propagation dynamique des fissures à vitesse variable se ramènent à la résolution du système d'équations hyperbolique (4.2) avec des conditions aux limites mixtes données sur le plan (l'une des conditions étant commune aux domaines considérés) quand la frontière de séparation des conditions mixtes se déplace à une vitesse variable.

Exposons les principaux résultats relatifs à ce problème d'après [54].

Soit un milieu élastique illimité représentant un espace à coupure semi-infinie (fig. 57) :

$$x_1 = 0, \quad -\infty < x_2 < l(t), \quad -\infty < x_3 < \infty. \tag{6.1}$$

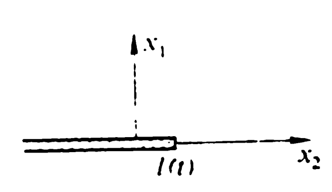


Fig. 57. Coupure semi-infinie dans l'espace.

Admettons que toutes les conditions imposées à ce milieu ne dépendent pas de la coordonnée x_3 (problème plan). En tenant compte de ceci, récrivons les équations du mouvement (1.1), ch. II, introduisant des notations quelque peu différentes :

$$\sigma_{\alpha\beta,\,\beta} = \rho\ddot{u}_\alpha, \quad \sigma_{3\alpha,\,\alpha} = \rho\ddot{u}_3 \quad (\alpha, \beta = 1, 2). \tag{6.2}$$

La loi de Hooke s'écrira alors de la manière suivante :

$$\sigma_{\alpha\beta} = \mu[\delta_{\alpha\beta}(\gamma^2 - 2)u_{\lambda,\,\lambda} + u_{\alpha,\,\beta} + u_{\beta,\,\alpha}] \quad (\alpha, \beta, \lambda = 1, 2), \tag{6.3}$$

$$\sigma_{3\alpha} = \mu u_{3,\,\alpha} \quad \left(\gamma = \frac{a}{b}\right).$$

Dans (6.2) les points désignent la différentiation par rapport au temps t, et l'indice après la virgule, la différentiation par rapport à la coordonnée correspondante. Ici et dans la suite les indices grecs prennent les valeurs 1, 2 et les indices latins, les valeurs 1, 2, 3 (la sommation est effectuée suivant l'indice grec qui se répète). Comme usuellement, nous chercherons la solution des équations du mouvement (6.2) en l'absence de forces massiques, cette solution devant vérifier les conditions initiales homogènes

$$u_k = \dot{u}_k = 0 \quad \text{pour } t \leqslant 0. \tag{6.4}$$

Soient données sur la coupure les contraintes $-p_i(x_2, t)$. Dans ce cas les conditions aux limites s'écriront :

$$\sigma_i(x_2, t) \equiv \sigma_{i1}(0, x_2, t) = -p_i(x_2, t) \quad \text{pour } x_1 = 0, \quad x_2 < l(t). \tag{6.5}$$

En ce qui concerne la fonction $l(t)$ définissant la loi de propagation de la fissure, admettons

$$0 \leqslant \dot{l}(t) < b. \tag{6.6}$$

Nous allons résoudre les équations (6.2), (6.3) à l'aide d'une double transformation de Laplace par rapport au temps t et à la coordonnée x_2. Les transformées seront désignées par les mêmes lettres que les originaux ; là où ceci prête à confusion, nous écrirons expli-

citement les arguments :

$$u_i(x_1, q, p) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-qx_2} dx_2 \int_0^{\infty} u_i(x_1, x_2, t) e^{-pt}\, dt$$

$$(0 < \operatorname{Re} q < \operatorname{Re} p), \tag{6.7}$$

$$\sigma_{ik}(x_1, q, p) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-qt} dx_2 \int_0^{\infty} \sigma_{ik}(x_1, x_2, t) e^{-pt}\, dt.$$

Par $\sigma_i(q, p)$ nous désignerons la transformée de Laplace des valeurs limites des composantes du vecteur des contraintes sur l'axe $x_2 : \sigma_i(x_2, t) \equiv \sigma_{i1}(0, x_2, t)$. Quant aux déplacements cherchés, il est commode de les exprimer par les contraintes dans le plan $x_1 = 0$, puisque dans le problème considéré les contraintes sont continues à la traversée de ce plan. Nous résoudrons les équations (6.2) et (6.3) de la façon suivante. Conformément aux résultats du § 5, ch. III, la recherche du vecteur déplacement $\boldsymbol{u}(u_1, u_2, u_3)$ ne dépendant pas de x_3 se ramène à la résolution des équations d'onde (5.51), (5.52), ch. III, fournissant les potentiels Φ, Ψ_1 et Ψ_2 liés au vecteur $\boldsymbol{u}$ par la formule tirée de (5.50) et (5.57), ch. III,

$$\boldsymbol{u} = \operatorname{grad} \Phi + \operatorname{rot}(\Psi_1 \boldsymbol{k}) + \operatorname{rot}\operatorname{rot}(\Psi_2 \boldsymbol{k}). \tag{6.8}$$

Appliquant aux équations d'onde une double transformation de Laplace par rapport à x_2 et t et résolvant les équations obtenues pour les transformées $\Phi(x_1, q, p)$, $\Psi_1(x_1, q, p)$ et $\Psi_2(x_1, q, p)$ dans le demi-espace $x_1 > 0$, nous trouvons

$$\Phi(x_1, q, p) = A e^{-x_1\sqrt{a^{-2}p^2 - q^2}},$$

$$\Psi_j(x_1, q, p) = B_j e^{-x_1\sqrt{b^{-2}p^2 - q^2}} \quad (j = 1, 2). \tag{6.9}$$

Puis, supposant dans le plan $x_1 = 0$ les composantes de la contrainte $\sigma_{i1}(0, x_2, t)$ données, nous obtenons à l'aide de (6.3) les conditions aux limites suivantes lorsque $x_1 = 0$ pour déterminer $\boldsymbol{u}$:

$$\sigma_{\alpha 1}(0, x_2, t) = \mu[\delta_{\alpha 1}(\gamma^2 - 2)u_{\lambda,\lambda} + u_{\alpha,1} + u_{1,\alpha}] \quad (\alpha = 1, 2),$$

$$\sigma_{31} = \mu u_{3,1}. \tag{6.10}$$

Des trois équations (6.10) les constantes A, B_1 et B_2 figurant dans (6.9) se déterminent univoquement. Le vecteur $\boldsymbol{u}(u_1, u_2, u_3)$ s'exprime donc dans le demi-espace $x_1 > 0$ au moyen de la contrainte sur le plan $x_1 = 0$.

D'une manière analogue, résolvant les équations d'onde dans le domaine $x_1 < 0$, nous trouvons

$$\begin{aligned} \Phi(x_1, q, p) &= A^0 e^{x_1\sqrt{a^{-2}p^2-q^2}}, \\ \Psi_j(x_1, q, p) &= B_j^0 e^{x_1\sqrt{b^{-2}p^2-q^2}} \quad (j = 1, 2). \end{aligned} \tag{6.11}$$

Les constantes A^0, B_1^0 et B_2^0 sont également tirées des conditions aux limites (6.10) et le vecteur $\boldsymbol{u}(u_1, u_2, u_3)$ dans le demi-plan $x_1 < 0$ s'exprime dans ce cas aussi au moyen de la contrainte sur le plan $x_1 = 0$.

On obtient en définitive les expressions suivantes de $u_i(x_1, q, p)$, valables pour $x_1 > 0$ et $x_1 < 0$:

$$\begin{aligned} u_1(x_1, q, p) = \frac{1}{\mu p R(q/p)} \Bigg\{ & e^{-|x_1|\sqrt{a^{-2}p^2-q^2}} \times \\ & \times \left[2\frac{q}{p}\sqrt{a^{-2}-\left(\frac{q}{p}\right)^2}\sqrt{b^{-2}-\left(\frac{q}{p}\right)^2}\,\sigma_2(q, p) - \right. \\ & \left. - \left(b^{2}-2\left(\frac{q}{p}\right)^2\right)\sqrt{a^{-2}-\left(\frac{q}{p}\right)^2}\,\sigma_1(q, p)\operatorname{sgn} x_1 \right] - \\ & - \frac{q}{p} e^{-|x_1|\sqrt{b^{-2}p^2-q^2}} \left[\left(b^{-2}-2\left(\frac{q}{p}\right)^2\right)\sigma_2(q, p) + \right. \\ & \left. + \frac{2q}{p}\sqrt{a^{-2}-\left(\frac{q}{p}\right)^2}\,\sigma_1(q, p)\operatorname{sgn} x_1 \right] \Bigg\}, \end{aligned} \tag{6.12}$$

$$\begin{aligned} u_2(x_1, q, p) &= \\ = \frac{1}{\mu p R(q/p)} \Bigg\{ & \frac{q}{p} e^{-|x_1|\sqrt{a^{-2}p^2-q^2}} \left[\left(b^{-2}-2\left(\frac{q}{p}\right)^2\right)\sigma_1(q, p) - \right. \\ & \left. - 2\frac{q}{p}\sqrt{b^{-2}-\left(\frac{q}{p}\right)^2}\,\sigma_2(q, p)\operatorname{sgn} x_1 \right] - e^{-|x_1|\sqrt{b^{-2}p^2-q^2}} \times \\ & \times \left[2\frac{q}{p}\sqrt{a^{-2}-\left(\frac{q}{p}\right)^2}\sqrt{b^{-2}-\left(\frac{q}{p}\right)^2}\,\sigma_1(q, p) - \right. \\ & \left. - \left(b^{-2}-2\left(\frac{q}{p}\right)^2\right)\sqrt{b^{-2}-\left(\frac{q}{p}\right)^2}\,\sigma_2(q, p)\operatorname{sgn} x_1 \right] \Bigg\}, \end{aligned} \tag{6.13}$$

$$\begin{aligned} u_3(x_1, q, p) &= \\ &= -\frac{1}{\mu p\sqrt{b^{-2}-\left(\frac{q}{p}\right)^2}} e^{-|x_1|\sqrt{b^{-2}p^2-q^2}}\,\sigma_3(q, p)\operatorname{sgn} x_1, \end{aligned} \tag{6.14}$$

où

$$R(s) = (2s^2 - b^{-2})^2 + 4s^2\sqrt{a^{-2} - s^2}\sqrt{b^{-2} - s^2},$$

$$\operatorname{sgn} x_1 = \begin{cases} 1, & x_1 > 0, \\ -1, & x_1 < 0. \end{cases}$$

Notons $w_i(x_2, t) = u_i(+0, x_2, t) - u_i(-0, x_2, t)$ le saut du déplacement dans la direction de l'axe x_2 et $w_i(q, p)$ la transformée correspondante de Laplace. De (6.12) à (6.14) nous obtenons alors

$$\sigma_i(q, p) + pT_i\left(\frac{q}{p}\right)w_i(q, p) = 0, \tag{6.15}$$

où $T_i(s)$ se détermine par

$$T_1(s) = \frac{\mu b^2 R(s)}{2\sqrt{a^{-2} - s^2}}, \quad T_2(s) = \frac{\mu b^2 R(s)}{2\sqrt{b^{-2} - s^2}}, \quad T_3(s) = \frac{\mu}{2}\sqrt{b^{-2} - s^2}. \tag{6.16}$$

Les expressions (6.12) à (6.14) donneraient la solution du problème si l'on pouvait calculer les fonctions $\sigma_i(q, p)$ à partir des conditions aux limites, autrement dit, si les contraintes étaient connues sur tout l'axe x_2. Mais les conditions (6.5) ne donnent les valeurs des contraintes que sur la coupure. D'autre part, en dehors de la fissure les déplacements doivent être continus, c'est-à-dire

$$w_i(x_2, t) = 0 \quad \text{pour } x_2 > l(t). \tag{6.17}$$

Ainsi, le problème s'est ramené à la recherche des contraintes $\sigma_i(x_2, t)$ sur le prolongement de la fissure à partir des conditions (6.5) et (6.17), et la transformée $\sigma_i(q, p)$ doit vérifier l'équation fonctionnelle (6.15).

On peut montrer que pour la fonction $R(s)$ on a la représentation

$$R(s) = (b^{-2} - a^{-2})(c^{-2} - s^2)S(s)S(-s), \tag{6.18}$$

où

$$S(s) = \exp\left[-\frac{1}{\pi}\int_{a^{-2}}^{b^{-2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{4\xi^2\sqrt{(\xi^2 - a^{-2})(b^{-2} - \xi^2)}}{(2\xi^2 - b^{-2})^2}\,\frac{d\xi}{\xi + s}\right] \tag{6.19}$$

et $s = \pm c^{-1}$ sont les racines de l'équation de Rayleigh (c étant la vitesse de propagation de l'onde de Rayleigh).

La fonction $S(s)$ est régulière, ne s'annule pas dans le plan de la variable complexe s coupé le long de l'axe réel du point $s = -a^{-1}$ jusqu'à $s = -b^{-1}$ et tend vers l'unité lorsque $s \to \infty$. La décomposition en facteurs (6.18) est à la base de la résolution

de l'équation (6.15) par la méthode de Wiener-Hopf pour une fissure semi-infinie immobile ou se propageant à une vitesse constante.

Examinons le cas où la fissure se propage à une vitesse inférieure à la vitesse de Rayleigh ($\dot{l} < c$). Dans la suite, pour plus de commodité nous omettrons l'indice de la coordonnée x_2. Sous les conditions (6.5), (6.17), on cherche une solution des équations (6.15) telle que $\sigma_i(x, t) \to \infty$ lorsque $x \to l(t)$ comme $[x - l(t)]^{-1/2}$:

$$\sigma_i(x, t) = \frac{K_i(t)}{\sqrt{2[x - l(t)]}} + O(1) \quad \text{quand} \quad x \to l(t) + 0. \tag{6.20}$$

Introduisons de nouvelles fonctions $F_i(x, t)$, $G_i(x, t)$ définies par

$$F_\alpha(q, p) = \frac{\sqrt{a^{-1} + \frac{q}{p}}\sqrt{b^{-1} - \frac{q}{p}}}{c^{-1} + q/p} S^{-1}\left(\frac{q}{p}\right)\sigma_\alpha(q, p) \quad (\alpha = 1, 2),$$

$$F_3(q, p) = \sigma_3(q, p); \tag{6.21}$$

$$G_\alpha(q, p) = \frac{\mu(1 - \gamma^{-2})(c^{-1} - q/p)}{4\sqrt{a^{-1} - q/p}\sqrt{b^{-1} - q/p}} S\left(-\frac{q}{p}\right)w_\alpha(q, p) \quad (\alpha = 1, 2),$$

$$G_3(q, p) = \frac{1}{2}\mu w_3(q, p). \tag{6.22}$$

L'équation (6.15) prend alors la forme

$$\frac{1}{p\sqrt{a_i^{-2} - \left(\frac{q}{p}\right)^2}} F_i(q, p) + G_i(q, p) = 0, \tag{6.23}$$

où $a_1 = a_3 = b$; $a_2 = a$. Après l'application de la transformation de Laplace inverse

$$f(x, t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{qx}\, dq \, \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} f(q, p)\, dp \quad (-a < c < 0)$$

les relations (6.23) prennent en variables physiques x et t la forme

$$F_i(x, t) = \sigma_i(x, t) - (1 - \delta_{i3})\frac{\partial A}{\partial t}, \tag{6.24}$$

$$A = D(-c^{-1})\sqrt{c^{-1} - a^{-1}}\sqrt{c^{-1} - b^{-1}}\int_0^{ct}\sigma_i(x - \eta, t - c^{-1}\eta)\, d\eta \; +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_{a^{-1}}^{b^{-1}}\{D(-s)\}\frac{\sqrt{s - a^{-1}}\sqrt{b^{-1} - s}}{c^{-1} - s}\int_0^{t/s}\sigma_i(x - \eta, t - s\eta)\, d\eta\, ds,$$

où l'on a noté

$$D(s)=[S(s)]^{-1}, \quad \delta_{i3} = \begin{cases} 0, & i \neq 3, \\ 1, & i = 3, \end{cases}$$

et

$$\{D(s)\} = D(s + i0) + D(s - i0)$$

est la somme des valeurs limites supérieure et inférieure de la fonction sur l'axe réel.

De la même façon nous obtenons de (6.22)

$$G_i(x, t) = c_i \Bigg[w_i(x, t) + (1 - \delta_{i3}) \times \\ \times \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{a^{-1}}^{b^{-1}} \frac{(c^{-1} - s)\{S(s)\}}{\sqrt{s - a^{-1}}\sqrt{b^{-1} - s}} \int\limits_0^{t/s} w_i(x + \eta, t - s\eta) d\eta \, ds \Bigg], \tag{6.25}$$

où

$$c_\alpha = \frac{1}{4}\mu(1-\gamma^{-2}) \quad (\alpha = 1, 2), \quad c_3 = \frac{1}{2}\mu.$$

Les transformations (6.24) et (6.25) présentent cette particularité que pour $x < l(t)$ (i.e. sur la fissure) les fonctions $F_i(x, t)$ se calculent à l'aide des valeurs $\sigma_i(x', t')$ (rappelons que par hypothèse $\dot{l}(t) < c$). Exactement de la même façon la valeur $G_i(x, t)$ sur le prolongement de la fissure se calcule d'après (6.25) au moyen des valeurs w_i sur le prolongement de la fissure. Aussi, au lieu des conditions (6.15), (6.17), a-t-on

$$\begin{aligned} F_i(x, t) &= -f_i(x, t) \quad \text{pour} \quad x < l(t), \\ G_i(x, t) &= 0 \qquad\qquad \text{pour} \quad x > l(t), \end{aligned} \tag{6.26}$$

où $f(x, t)$ est une fonction connue, liée à $p_i(x, t)$ par la transformation (6.24) :

$$f_i(x, t) = p_i(x, t) - (1 - \delta_{i3}) \frac{\partial B}{\partial t}, \tag{6.27}$$

$$B = D(-c^{-1})\sqrt{c^{-1} - a^{-1}}\sqrt{c^{-1} - b^{-1}} \int\limits_0^{ct} p_i(x - \eta, t - c^{-1}\eta) \, d\eta + \\ + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{a^{-1}}^{b^{-1}} \{D(-s)\} \frac{\sqrt{s - a^{-1}}\sqrt{b^{-1} - s}}{c^{-1} - s} \int\limits_0^{t/s} p_i(x - \eta, t - s\eta) \, d\eta \, ds.$$

Les transformations du type de la convolution (6.24) et (6.25) sont inversibles. Les transformations inverses sont de la forme

$$\sigma_i(x, t) = F_i(x, t) + (1 - \delta_{i3}) \times$$

$$\times \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_{a^{-1}}^{b^{-1}} \{S(-s)\} \frac{c^{-1} - s}{\sqrt{(s - a^{-1})(b^{-1} - s)}} \int_0^{t/s} F_i(x - \eta, t - s\eta)\, d\eta\, ds, \quad (6.28)$$

$$w_i(x, t) = c_i^{-1} \Big[G_i(x, t) - (1 - \delta_{i3}) \frac{\partial}{\partial t} D(-c^{-1}) \times$$

$$\times \sqrt{c^{-1} - a^{-1}} \sqrt{c^{-1} - b^{-1}} \int_0^{ct} G_i(x + \eta, t - c^{-1}\eta)\, d\eta +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{a^{-1}}^{b^{-1}} \{D(-s)\} \frac{\sqrt{1 - a^{-1}}\sqrt{b^{-1} - s}}{c^{-1} - s} \int_0^{c/s} G_i(x + \eta, t - s\eta) d\eta\, ds) \Big]. \quad (6.29)$$

Donc, le problème est ramené à la recherche des fonctions $F_i(x, t)$ à partir des équations (6.23) et des conditions aux limites (6.26).

Le comportement asymptotique des $F_i(x, t)$ pour $x \to l(t)$ est analogue au comportement des $\sigma_i(x, t)$:

$$F_i(x, t) = \frac{m_i(t)}{\sqrt{2[x - l(t)]}} \quad \text{quand } x \to l(t) + 0, \quad (6.30)$$

où les coefficients d'intensité des contraintes $m_i(t)$ se calculent en fonction de $k_i(t)$ au moyen de (6.24) sous la forme

$$m_i(t) = k_i(t) \left[\delta_{i3} + (1 - \delta_{i3}) D\left(-\frac{1}{v(t)}\right) \frac{\sqrt{1 - \frac{v(t)}{a}} \sqrt{1 - \frac{v(t)}{b}}}{1 - \frac{v(t)}{c}} \right], \quad (6.31)$$

$v(t) = \dot{l}(t)$ étant la vitesse de propagation de la fissure à l'instant t.

Appliquant à l'équation (6.23) la transformation de Laplace inverse, nous obtenons

$$\frac{1}{\pi} \iint_{\Delta_i} \frac{F_i(x, t)\, dx\, dt}{\sqrt{(t_0 - t)^2 a_i^2 - (x_0 - x)^2}} = -\frac{1}{a^2} G(x_0, t_0), \quad (6.32)$$

où Δ_i est un triangle tel que

$$a_i^2(t_0 - t)^2 - (x_0 - x)^2 \geqslant 0 \quad (0 \leqslant t \leqslant t_0). \quad (6.33)$$

En particulier, pour $x_0 > l(t_0)$ nous avons en vertu de (6.26)

$$\frac{1}{\pi}\iint_{\Delta_t}\frac{F_t(x,t)\,dx\,dt}{\sqrt{a_t^2(t_0-t)^2-(x_0-x)^2}}=0. \qquad (6.34)$$

Les solutions des équations du type (6.34) sont considérées dans la théorie de l'écoulement supersonique d'une aile fine [69]. Le bord de la fissure ne se trouvant pas dans le domaine Δ_t pour $x_0 > a_t t_0 + l(0)$, il est aisé de prouver que $F_t(x, t) \equiv 0$ pour $x > a_t t + l(0)$. Introduisons les variables caractéristiques

$$\xi = (a_t t - x)\sqrt{2}, \quad \eta = (a_t t + x)\sqrt{2} \qquad (6.35)$$

et désignons par $\eta^*(\xi)$ la coordonnée du bord de la fissure en variables caractéristiques qu'on tire de l'équation

$$\eta^* - \xi = \sqrt{2}\,l\left(\frac{\eta^*+\xi}{a_t\sqrt{2}}\right). \qquad (6.36)$$

L'équation (6.34) s'écrit alors

$$\frac{1}{\pi}\int_{-l(0)/\sqrt{2}}^{\xi_0}\frac{d\xi}{\sqrt{\xi_0-\xi}}\int_{-\xi}^{\eta_0}\frac{F_t(\xi,\eta)\,d\eta}{\sqrt{\eta_0-\eta}}=0 \quad \text{pour } \eta_0 > \eta^*(\xi_0). \qquad (6.37)$$

On reconnaît dans l'équation (6.37) l'équation d'Abel (2.37), ch. I, par rapport à la fonction

$$\int_{-\xi}^{\eta_0}\frac{F_t(\xi,\eta)\,d\eta}{\sqrt{\eta_0-\eta}}.$$

Inversant l'opérateur d'Abel par rapport à ξ, nous obtenons

$$\int_{-\xi}^{\eta_0}\frac{F_t(\xi,\eta)\,d\eta}{\sqrt{\eta_0-\eta}}=0. \qquad (6.38)$$

Puisqu'en vertu de (6.26) les $F_t(\xi, \eta)$ sont connues pour $\eta < \eta^*(\xi)$, cette équation se récrit de la façon suivante

$$\int_{\eta^*(\xi)}^{\eta_0}\frac{F_t(\xi,\eta)\,d\eta}{\sqrt{\eta_0-\eta}}=\int_{-\xi}^{\eta^*(\xi)}\frac{f_t(\xi,\eta)}{\sqrt{\eta_0-\eta}}\,d\eta. \qquad (6.39)$$

La solution de cette équation intégrale d'Abel se ramène à la forme

$$F_i(\xi_0, \eta_0) = \frac{1}{\pi\sqrt{\eta_0 - \eta_i^*(\xi_0)}} \int_{-\xi_0}^{\eta_i^*(\xi_0)} f_i(\xi_0, \eta) \frac{\sqrt{\eta_i^*(\xi_0) - \eta}}{\eta_0 - \eta} d\eta. \quad (6.40)$$

En variables physiques x, t cette solution s'écrit

$$F_i(x_0, t_0) = \frac{1}{\pi\sqrt{x_0 - l(t^*)}} \int_{x_0 - a_i t_0}^{l(t_i^*)} f_i\left(x, t_0 - \frac{x_0 - x}{a_i}\right) \frac{\sqrt{l(t^*) - x}}{x_0 - x} dx, \quad (6.41)$$

où t_i^* est la solution de l'équation

$$a_i t_0 - x_0 = a_i t_i^* - l(t_i^*). \quad (6.42)$$

Les équations (6.41), (6.27) et (6.28) donnent maintenant la solution du problème concernant une fissure semi-infinie. L'unicité de la solution découle d'emblée de la solution du problème homogène correspondant (c'est-à-dire quand on pose dans (6.15) $p_i(x, t) \equiv 0$).

De (6.41) nous tirons en particulier l'expression du coefficient d'intensité des contraintes

$$m_i(t) = \frac{\sqrt{2\left[1 - \frac{v(t_0)}{a_i}\right]}}{\pi} \int_{l(t_0) - a_i t_0}^{l(t_0)} f_i\left(x, t_0 - \frac{l(t_0) - x}{a_i}\right) \frac{dx}{\sqrt{l(t_0) - x}} \quad (6.43)$$

ou en vertu de (6.31)

$$k_i(t) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\left[\delta_{i3}\sqrt{1 - \frac{v(t)}{b}} + (1 - \delta_{i3}) S\left(-\frac{1}{v(t)}\right) \times \right.$$

$$\left. \times \frac{\left(1 - \frac{v(t)}{c}\right)\sqrt{1 - \frac{v(t)}{a_i}}}{\sqrt{1 - \frac{v(t)}{a}}\sqrt{1 - \frac{v(t)}{b}}}\right] \int_0^{a_i t_0} f_i\left(l(t) - x, t - \frac{x}{a_i}\right) \frac{dx}{\sqrt{x}}. \quad (6.44)$$

Ecrivons cette expression sous la forme

$$k_i(t) = K_i(v(t)) k_{i0}(l(t), t),$$

où l'on note

$$K_i(v) = \delta_{i3}\sqrt{1-\frac{v}{b}} + (1-\delta_{i3})S\left(-\frac{1}{v}\right)\frac{\left(1-\frac{v}{b}\right)\sqrt{1-\frac{v}{a_i}}}{\sqrt{1-\frac{v}{a}}\sqrt{1-\frac{v}{b}}}, \tag{6.45}$$

$$k_{i0}(l, t) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{a_i t} f_i\left(l-x, t-\frac{x}{a_i}\right)\frac{dx}{\sqrt{x}}. \tag{6.46}$$

Dans la dernière expression l est considéré comme paramètre, i.e. que celle-ci aura la même valeur pour toute loi de propagation de la fissure jusqu'à l'instant t, et en particulier dans le cas où la pointe de la fissure se trouve dès le début au point l. D'autre part dans ce cas $v = 0$ et l'expression (6.45) devient égale à l'unité. Il découle alors de (6.44) que $k_{i0}(l, t)$ est le coefficient d'intensité des contraintes dans le cas d'une fissure ne se propageant pas, avec sa pointe au point l, sollicitée par les mêmes charges. Notons par ailleurs que pour $i = 3$ la solution obtenue plus haut reste valable aussi lorsque $c < \dot{l}(t) < b$.

Dans le cas d'une fissure statique de dimensions finies qui commence brusquement à se propager dans les deux directions à des vitesses variables, la solution obtenue reste valable tant que ne commencent pas à interagir les perturbations venues des bords opposés. Par superposition successive des solutions relatives à des fissures semi-infinies on peut en principe obtenir la solution concernant une fissure finie pour tout intervalle fini du temps.

Considérons plus en détail la fissure de cisaillement longitudinal. Dans ce cas $i = 3$, les formules obtenues plus haut se simplifient considérablement, de sorte que nous obtenons des formules (6.41), (6.27) et (6.28)

$$\sigma_3(x_0, t_0) = \frac{1}{\pi\sqrt{x_0 - l(t^*)}}\int_{x_0-bt}^{l(t_3^*)} P_3\left(x, t_0 - \frac{x_0 - x}{b}\right)\frac{\sqrt{l(t^*) - x}}{x_0 - x}\,dx,$$

où t_3^* est la solution de l'équation $bt_0 - x_0 = bt_3^* - l(t_3^*)$ et de (6.45) nous avons l'expression suivante du coefficient d'intensité des contraintes

$$k_3(t) = \sqrt{1-\frac{v}{b}}\,k_{30}(l, t), \tag{6.47}$$

où

$$k_{30}(l, t) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{bt} f_3\left(l - x, t - \frac{x}{b}\right)\frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

Le critère énergétique de Griffith pour un milieu fragile linéairement élastique, dans le cas d'une propagation dynamique de la fissure de cisaillement longitudinal, s'écrit à l'aide du coefficient d'intensité k_3 sous la forme suivante [57] :

$$2P(v) = \frac{\pi}{2\mu v}\frac{k_3^2}{\sqrt{v^{-2} - b^{-2}}}, \tag{6.48}$$

où k_3 se donne par la formule (6.47) et $P(v)$ est l'énergie surfacique effective, supposée fonction caractéristique de la vitesse de propagation de la fissure pour le matériau donné et devant être déterminée expérimentalement ou théoriquement moyennant certaines hypothèses physiques sur le mécanisme de destruction. Connaissant $P(v)$ on peut, à l'aide de l'équation (6.48), déterminer la loi de propagation d'une fissure.

§ 7. Problèmes dynamiques concernant un coin pour des conditions aux limites mixtes

Nous allons exposer une méthode de construction des solutions analytiques exactes des problèmes dynamiques spatiaux de la théorie de l'élasticité relatifs à un coin pour des conditions aux limites mixtes *) [121]. La méthode s'appuie sur les transformations intégrales et comporte la détermination des singularités des transformées des fonctions inconnues au voisinage de l'arête.

La méthode sera illustrée sur l'exemple d'un problème spatial concernant la diffraction d'une onde longitudinale sur un coin solide plongé sans adhérence dans un milieu élastique.

Supposons que le milieu élastique remplit le domaine $r > 0$, $0 < \varphi < \pi/l$, $-\infty < r < \infty$ et baigne un coin $\pi/l < \varphi < 2\pi$, sur les faces duquel $\varphi = 0$, π/l sont données les conditions $w_\varphi = 0$, $\sigma_{\varphi r} = \sigma_{\varphi z} = 0$, où r, φ, z sont des coordonnées cylindriques (l'axe z est dirigé le long de l'arête du coin). A l'instant $\tau = -r_0$ ($\tau = at$, $r_0 > 0$) au point $(r_0, \varphi_0, 0)$ nait une onde sphérique longitudinale de potentiel

$$\Phi_0 = \frac{1}{R} f(\tau + r_0 - R), \qquad R = [z^2 + r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos(\varphi - \varphi_0)]^{1/2}, \tag{7.1}$$

*) Il s'agit du cas où sur les demi-plans frontières sont donnés le déplacement normal et la contrainte tangentielle et, inversement, la contrainte normale et le déplacement tangentiel.

dont le front atteint la surface du coin à l'instant τ_*. Ici $-r_0 < < \tau_* \leqslant 0$, $f(\tau)$ est une fonction arbitraire vérifiant les conditions d'application de la transformation de Laplace et $f(\tau) \equiv 0$ lorsque $\tau < 0$. Le coin introduit dans le champ des déplacements de l'onde incidente la perturbation $\boldsymbol{u} \equiv \{u_r, u_\varphi, u_z\}$, décrite au moyen d'un potentiel longitudinal Φ et de deux potentiels transversaux Ψ_1, Ψ_2 par les formules (5.50) et (5.57), ch. III, en coordonnées cylindriques :

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{\partial\Psi_1}{r\,\partial\varphi} + \frac{\partial^2\Psi_2}{\partial r\,\partial z}, \\ u_\varphi &= \frac{\partial\Phi}{r\,\partial\varphi} - \frac{\partial\Psi_1}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2\Psi_2}{\partial\varphi\,\partial z}, \\ u_z &= \frac{\partial\Phi}{\partial z} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Psi_2}{\partial\varphi^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Psi_2}{\partial r}\right). \end{aligned} \qquad (7.2)$$

Il n'est pas difficile de se convaincre que les conditions aux limites sur le coin sont satisfaites si ont lieu les égalités

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} = -\frac{\partial\Phi_0}{\partial\varphi}, \quad \Psi_1 = 0, \quad \frac{\partial\Psi_2}{\partial\varphi} = 0 \quad \left(\varphi = 0, \frac{\pi}{l}\right).$$

Tenant compte du fait qu'avant l'instant $\tau = \tau_*$ les perturbations ne se manifestent pas, nous obtenons en définitive les trois systèmes suivants d'équations du mouvement, de conditions aux limites et de conditions initiales pour déterminer Φ, Ψ_1 et Ψ_2 :

$$\begin{aligned} &\Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial\tau^2} \quad \left(\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + r^{-1}\frac{\partial}{\partial r} + r^{-2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right), \\ &\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} = -\frac{\partial\Phi_0}{\partial\varphi} \quad \left(\varphi = 0, \frac{\pi}{l}\right), \quad \Phi = 0 \quad (\tau < \tau_*); \end{aligned} \qquad (7.3)$$

$$\begin{aligned} &\Delta\Psi_1 = \gamma^2\frac{\partial^2\Psi_1}{\partial\tau^2} \quad \left(\gamma = \frac{a}{b} > 1\right), \\ &\Psi_1 = 0 \quad \left(\varphi = 0, \frac{\pi}{l}\right), \quad \Psi_1 = 0 \quad (\tau < \tau_*); \end{aligned} \qquad (7.4)$$

$$\begin{aligned} &\Delta\Psi_2 = \gamma^2\frac{\partial^2\Psi_2}{\partial\tau^2}, \\ &\frac{\partial\Psi_2}{\partial\varphi} = 0 \quad \left(\varphi = 0, \frac{\pi}{l}\right), \quad \Psi_2 = 0 \quad (\tau < \tau_*). \end{aligned} \qquad (7.5)$$

La solution fournie par le système d'équations (7.3) à (7.5) doit vérifier la condition suivante sur l'arête du coin :

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{c} + O(r^\varepsilon) \quad (r \to 0, \ \varepsilon > 0, \ \boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}(\tau, z)), \qquad (7.6)$$

condition assurant l'intégrabilité des contraintes (pour $r \to 0$) et l'unicité du problème posé (la convergence est supposée uniforme en τ, φ, z). Nous admettons en outre $1/2 \leqslant l < 1$, la solution pour $l \geqslant 1$, comme il sera montré plus bas, pouvant être tirée de la partie symétrique, par rapport au plan bissecteur du coin, de la solution trouvée pour $1/2 \leqslant l < 1$.

Notons aussi que les potentiels Φ, Ψ_1 et Ψ_2, solutions des systèmes (7.3) à (7.5), ne sont pas indépendants mais liés entre eux par la condition (7.6). Cette circonstance complique considérablement la résolution des problèmes dynamiques du coin aux conditions aux limites mixtes.

Nous allons tout d'abord résoudre les systèmes (7.3) à (7.5) indépendamment l'un des autres tant qu'il est possible de ne pas prendre en considération la condition sur l'arête. Appliquons successivement à ces systèmes la transformation bilatérale de Laplace par rapport à τ et z :

$$\Delta_1\overline{\Phi}^* = \omega^2\overline{\Phi}^* \quad \left(\Delta_1 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + r^{-1}\frac{\partial}{\partial r} + r^{-2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right),$$
$$\frac{\partial\overline{\Phi}^*}{\partial\varphi} = -\frac{\partial\overline{\Phi}_0^*}{\partial\varphi} \quad \left(\varphi = 0, \frac{\pi}{l}\right); \tag{7.7}$$

$$\Delta_1\overline{\Psi}_1^* = \varkappa^2\overline{\Psi}_1^*,$$
$$\overline{\Psi}_1^* = 0 \quad \left(\varphi = 0, \frac{\pi}{l}\right); \tag{7.8}$$

$$\Delta_1\overline{\Psi}_2^* = \varkappa^2\overline{\Psi}_2^*,$$
$$\frac{\partial\overline{\Psi}_2^*}{\partial\varphi} = 0 \quad \left(\varphi = 0, \frac{\pi}{l}\right); \tag{7.9}$$

$$\overline{\varphi}(p, r, \varphi, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau, r, \varphi, z)e^{-p\tau}\,d\tau$$
$$(\varphi = \Phi, \Psi_1, \Psi_2),$$
$$\overline{\varphi}^*(p, r, \varphi, s) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\varphi}(p, r, \varphi, z)e^{-sz}\,dz$$
$$(\operatorname{Re} p > 0, \quad |\operatorname{Re} s| < \operatorname{Re} p).$$

$$\overline{\Phi}_0^*(p, r, \varphi, s) = \overline{f}(p)e^{pr_0}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-sz-pR}\frac{dz}{R} = 2\overline{f}(p)e^{pr_0}K_0(p\omega),$$

$$f(\tau) \doteqdot \overline{\overline{f}(p)}, \quad \rho = [r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos(\varphi - \varphi_0)]^{1/2},$$
$$\omega = \sqrt{p^2 - s^2}, \quad \varkappa = \sqrt{\gamma^2 p^2 - \rho^2}.$$

Ici $K_\alpha(s)$ est la fonction de Macdonald d'ordre α de l'argument s (l'inégalité $\operatorname{Re} p > 0$ découle du fait que l'intégration par rapport à τ dans la transformation bilatérale de Laplace s'opère en réalité pour $\tau > -r_0$, puisque pour $\tau < -r_0$ la source est inactive). Afin de choisir les branches déterminées des fonctions ω et $\varkappa$, on fait passer des coupures dans le plan s des points $s = \pm p$ (pour $\varkappa$, des points $s = \pm\gamma p$) vers l'infini le long des rayons $\arg s = \arg p$ et $\arg s = \arg p + \pi$ et les branches de ω et $\varkappa$ sont choisies de telle sorte que $\omega = p$ et $\varkappa = \gamma p$ pour $s = 0$. Il est alors facile de vérifier que $\operatorname{Re}\omega > 0$ et $\operatorname{Re}\varkappa > 0$ lorsque $|\operatorname{Re} s| < \operatorname{Re} p$.

Ensuite, pour résoudre les systèmes (7.7) à (7.9) nous développons sur le segment $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/l$ les fonctions $\overline{\Phi}^*$ et $\overline{\Psi}_2^*$ en séries suivant les cosinus et $\overline{\Psi}_1^*$ suivant les sinus. Les coefficients de ces développements seront obtenus à partir des équations que nous établirons en multipliant les équations pour $\overline{\Phi}^*$ et $\overline{\Psi}_2^*$ de (7.7) à (7.9) par $2l\pi^{-1}\cos nl\varphi\, d\varphi$ et l'équation pour $\overline{\Psi}_1^*$ de (7.8) par $2l\pi^{-1}\sin nl\varphi\, d\varphi$, et intégrant par rapport à φ de 0 à π/l. Par suite, compte tenu des conditions aux limites dans les systèmes (7.7) à (7.9), nous obtenons les équations différentielles ordinaires suivantes du deuxième ordre :

$$\Delta_2 a_n = \omega^2 a_n + f_n(r) \quad \left(\Delta_2 \equiv \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{n^2l^2}{r^2}\right), \tag{7.10}$$

$$\Delta_2 b_{nj} = \varkappa^2 b_{nj} \quad (j = 1, 2), \tag{7.11}$$

dans lesquelles on note

$$f_n(r) = \frac{2l}{\pi r^2}\left[(-1)^n \frac{\partial\overline{\Phi}_0^*}{\partial\varphi}\bigg|_{\varphi=\frac{\pi}{l}} - \frac{\partial\overline{\Phi}_0^*}{\partial\varphi}\bigg|_{\varphi=0}\right],$$

$$\overline{\Phi}^*(p, r, \varphi, s) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nl\varphi,$$

$$a_n = \frac{2l}{\pi}\int_0^{\pi/l} \overline{\Phi}^* \cos nl\varphi\, d\varphi \quad (n = 0, 1, 2, \ldots);$$

$$\overline{\Psi}_1^*(p, r, \varphi, s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{n1} \sin nl\varphi,$$

$$b_{n1} = \frac{2l}{\pi}\int_0^{\pi/l} \overline{\Psi}_1^* \sin nl\varphi\, d\varphi \quad (n = 1, 2, 3, \ldots);$$

$$\overline{\Psi}_2^*(p, r, \varphi, s) = \frac{b_{02}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_{n2} \cos nl\varphi,$$

$$b_{n2} = \frac{2l}{\pi} \int_0^{\pi/l} \overline{\Psi}_2^* \cos nl\varphi \, d\varphi \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Résolvant (7.10) et (7.11) nous obtenons

$$a_n = A_n K_{nl}(r\omega) + B_n I_{nl}(r\omega) + F_n(r), \tag{7.12}$$

$$F_n(r) = -K_{nl}(r\omega) \int_0^r I_{nl}(x\omega) f_n(x) x \, dx - I_{nl}(r\omega) \int_r^{\infty} K_{nl}(x\omega) f_n(x) \, x \, dx,$$

$$b_{nj} = C_{nj} K_{nl}(r\varkappa) + D_{nj} I_{nl}(r\varkappa) \quad (j = 1, 2). \tag{7.13}$$

Ici $I_\alpha(s)$ est une fonction modifiée de Bessel de première espèce d'ordre α. Utilisant les expressions asymptotiques des fonctions cylindriques

$$K_\alpha(s) \sim \left[\frac{\pi}{2s}\right]^{1/2} e^{-s}, \quad I_\alpha(s) \sim (2\pi s)^{-1/2} \, e^s$$

pour $|s| \to \infty$, $|\arg s| < \pi/2$ nous trouvons que $F_n(r) \to 0$ pour $r \to \infty$. Les perturbations se propageant à une vitesse finie, nous supposons que $|\overline{\Phi}| < cR^{-1} |e^{-pR}|$, $|\overline{\Psi}_j| < cR^{-1} |e^{-pR}|$ pour $R \to \infty$, où c ne dépend pas de r, φ, z. D'où nous obtenons que $a_n \to 0$, $b_{nj} \to 0$ pour $r \to \infty$. De (7.12) et (7.13) nous trouvons alors $B_n \equiv D_{nj} \equiv 0$. Pour déterminer les coefficients A_n et C_{nj} utilisons la condition (7.6). Appliquons à (7.6), où les composantes du vecteur déplacement sont exprimées par (7.2), la transformation bilatérale de Laplace par rapport à τ et z, développant ensuite sur le segment $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/l$ les images $\overline{u}_r^*$, $\overline{u}_z^*$ en série suivant les cosinus et $\overline{u}_\varphi^*$ en série suivant les sinus. Pour obtenir ces développements, multiplions les expressions des composantes $\overline{u}_r^*$ et $\overline{u}_z^*$ par $2l\pi^{-1} \cos nl\varphi \, d\varphi$ et celle de $\overline{u}_\varphi^*$ par $2l\pi^{-1} \sin nl\varphi \, d\varphi$ et intégrons-les par rapport à φ de 0 à π/l. Nous obtenons pour chaque n ($n = 0$, $1, 2, \ldots$) un système d'équations

$$\begin{gathered} \frac{da_n}{dr} + \frac{nl}{r} b_{n1} + s \frac{db_{n2}}{dr} = c + O(r^\varepsilon), \\ s a_n - \varkappa^2 b_{n2} = c + O(r^\varepsilon) \quad (\varepsilon > 0, \ r \to 0), \\ -\frac{nla_n}{r} - \frac{db_{n1}}{dr} - \frac{snl}{r} b_{n2} = c + O(r^\varepsilon) \end{gathered} \tag{7.14}$$

pour déterminer les coefficients cherchés A_n et C_{nj} (pour $n = 0$ le système de trois équations dégénère en un système de deux équations pour a_0 et b_{02}, car $b_{01} = 0$). Pour déterminer A_n et C_{nj} nous aurons besoin des expressions asymptotiques des fonctions

cylindriques $I_\alpha(s)$ et $K_\alpha(s)$ pour $s \to 0$:

$$I_\alpha(s) = (s/2)^\alpha/\Gamma(1+\alpha) + O(s^{2+\alpha}),$$
$$K_0(s) = -\ln s + O(1), \quad K_1(s) = s^{-1} + O(s \ln s), \qquad (7.15)$$
$$2K_\alpha(s) = \Gamma(\alpha)(2/s)^\alpha + \begin{cases} \Gamma(-\alpha)(s/2)^\alpha + O(s^{2-\alpha}) & (0 < \alpha < 1), \\ O(s^{2-\alpha}) & (\alpha > 1). \end{cases}$$

Des expressions (7.15) on tire les estimations asymptotiques suivantes pour $F_n(r)$ lorsque

$$F_0(r) = c + O(r), \quad F_1(r) = Mr^l + O(r), \qquad (7.16)$$
$$M = -\left[\left(\frac{\omega}{2}\right)^l/\Gamma(1+l)\right]\int_0^\infty K_l(x\omega) f_1(x) x\, dx =$$
$$= 8f(p)[e^{pr_0}/\Gamma(l)]\; K(r_0\omega)\left(\frac{\omega}{2}\right)^l \cos l\,\varphi_0,$$
$$F_n(r) = O(r) \quad (n \geqslant 2)$$

(pour $l = 1/2$ en particulier nous avons $F_{2n}(r) \equiv 0$, puisque dans ce cas $f_{2n}(r) \equiv 0$).

Portant (7.12) et (7.13) dans (7.14) et utilisant les estimations asymptotiques (7.15) et (7.16), nous établissons que pour $n = 0$ et $n \geqslant 2$ les conditions (7.14) seront satisfaites si l'on pose $A_n \equiv C_{nj} \equiv \equiv 0$. Dans le cas de $n = 1$ nous obtenons de (7.14) le système suivant :

$$Sr^{-l-1} + Tr^{l-1} + O(1) = c + O(r^\varepsilon),$$
$$Wr^{-l} + O(r^l) = c + O(r^\varepsilon) \quad (\varepsilon > 0, \quad r \to 0),$$
$$Sr^{-l-1} - Tr^{l-1} + O(1) = c + O(r^\varepsilon),$$

où l'on note

$$S = -2^{l-1}\Gamma(1+l)[A_1\omega^{-l} - C_{11}\,\varkappa^{-l} + sC_{12}\,\varkappa^{-l}],$$
$$T = Ml - 2^{-l-1}\Gamma(1-l)[A_1\omega^l + C_{11}\,\varkappa^l + s\varkappa^l C_{12}], \qquad (7.17)$$
$$W = 2^{l-1}\Gamma(l)[A_1 s\omega^{-l} - \varkappa^{2-l}C_{12}].$$

De (7.17) nous trouvons $s = 0$, $T = 0$, $W = 0$, ce qui donne pour A_1, C_{11} et C_{12} les expressions suivantes :

$$A_1 = \omega^l\varkappa^{2-l}s^{-1}C_{12}, \quad C_{11} = \gamma^2 p^2 s^{-1} C_{12},$$
$$C_{12} = \frac{16}{\pi}\,\frac{l\bar{f}(p)s\omega^l K_l(r_0\omega)\sin l\pi \cos l\varphi_0}{\omega^{2l}\varkappa^{2-l} + (s^2+\gamma^2p^2)\varkappa^l}\,e^{pr_0}. \qquad (7.18)$$

A l'aide de (7.18) nous obtenons pour $\overline{\Phi}^*$, $\overline{\Psi}_1^*$ et $\overline{\Psi}_2^*$

$$\overline{\Phi}^* = \frac{1}{2}F_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} F_n(r)\cos nl\,\varphi + s^{-1}\varkappa^{2-l}\omega^l \cos l\varphi K_l(r\omega)\,C_{12},$$
$$\overline{\Psi}_1^* = s^{-1}p^2\gamma^2 \sin l\varphi\, K_l(r\varkappa)C_{12}, \qquad (7.19)$$
$$\overline{\Psi}_2^* = \cos l\varphi\, K_l(r\varkappa)C_{12}.$$

La somme des termes en F_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ qui figure dans l'expression de $\overline{\Phi}^*$ est la transformée de Laplace (par rapport à τ et z) de la solution perturbée Φ' du problème acoustique correspondant ($\mu = 0$). On le démontre en remarquant que, premièrement, l'original de cette somme vérifie le système (7.7) et que, deuxièmement, pour des $f(\tau)$ suffisamment régulières, il vérifie la condition assurant l'unicité de la solution du problème acoustique [33]

$$\frac{\partial(\Phi_0 + \Phi')}{\partial\tau} = O(1), \quad \frac{r\partial(\Phi_0 + \Phi')}{\partial r} = o(1) \quad (r \to 0).$$

Ajoutant donc la transformée de l'onde sphérique incidente et appliquant la transformation de Laplace inverse par rapport à s et p, nous obtenons ($\Phi_1 = \Phi_0 + \Phi$)

$$\Phi_1 = \Phi_a + \frac{\cos l\varphi}{(2\pi i)^2} \int\limits_{c_0 - i\infty}^{c_0 + i\infty} e^{p\tau} dp \int\limits_{b_0 - i\infty}^{b_0 + i\infty} s^{-1} \varkappa^{2-c} \omega^l C_{12} K_l(r\omega) e^{sz}\, ds,$$

$$\Psi_1 = \gamma^2 \frac{\sin l\varphi}{(2\pi i)^2} \int\limits_{c_0 - i\infty}^{c_0 + i\infty} e^{p\tau} p^2 dp \int\limits_{b_0 - i\infty}^{b_0 + i\infty} s^{-1} C_{12} K_l(r\varkappa) e^{sz}\, ds, \qquad (7.20)$$

$$\Psi_2 = \frac{\cos l\varphi}{(2\pi i)^2} \int\limits_{c_0 - i\infty}^{c_0 + i\infty} e^{p\tau} dp \int\limits_{b_0 - i\infty}^{b_0 + i\infty} C_{12} K_l(r\varkappa) e^{sz}\, ds \quad (c_0 > |b_0|).$$

Ici la solution acoustique Φ_a ($\Phi_a = \Phi_0 + \Phi'$), compte tenu des résultats rapportés dans [28], peut être représentée sous la forme

$$\Phi_a = \frac{f(+0)}{1 + \tau/r_0} Q\left(\tau + \frac{\tau^2 - r^2 - z^2}{2r_0}, r, \varphi\right) -$$

$$- \int\limits_{R - r_0}^{\tau} \frac{d}{dx}\left[\frac{f(\tau - x)}{1 + x/r_0}\right] Q\left(x + \frac{x^2 - r^2 - z^2}{2r_0}, r, \varphi\right) dx, \qquad (7.21)$$

où $Q(\tau, r, \varphi)$ est la solution du problème acoustique concernant la diffraction d'une onde plane $H[\tau + r\cos(\varphi - \varphi_0)]\, r_0^{-1}$ sur le coin envisagé, qui, comme il est montré dans [33], peut être

représentée sous la forme

$$Q(\tau, r, \varphi) = H(r - \tau)\{\sigma(\varphi - \varphi_0)H[\tau + r\cos(\varphi - \varphi_0)] + \sigma(\varphi - \varphi_0)H[\tau + r\cos(\varphi + \varphi_0)^*]\}r_0^{-1} + H(\tau - r)\pi^{-1}r_0^{-1}(\operatorname{arc\,tg}\lambda_+ + \operatorname{arc\,tg}\lambda_-),$$

$$\lambda_\pm = \frac{(1 - y^{2l})\sin l\pi}{(1 + y^{2l})\cos l\pi - 2y^l\cos l(\varphi \pm \varphi_0)},$$

$$y = \frac{\tau}{r} - \left[\left(\frac{\tau}{r}\right)^2 - 1\right]^{1/2},$$

$$\sigma(\varphi) = 1 \ (|\varphi| < \pi), \quad \sigma(\varphi) = 0 \quad \left(\pi < |\varphi| < \frac{\pi}{l}\right),$$

$$\sigma(\varphi + 2\pi/l) = \sigma(\varphi), \quad (\varphi + \varphi_0)^* = \varphi + \varphi_0 + 2\pi m/l,$$

$$H(x) = 1 \quad (x > 0), \quad H(x) = 0 \quad (x < 0).$$

Le nombre entier m ($m = 0, -1$) est choisi de façon qu'au point considéré de l'espace physique on ait toujours $-\pi/l < (\varphi + \varphi_0)^* \leqslant \pi/l$.

Comme il découle de (7.20), les termes élastiques supplémentaires ajoutés à la solution acoustique ne disparaissent que pour $\varphi_0 = \pi/2l$ (cas de symétrie par rapport au plan bissecteur du coin) et pour $l \to 1$ (réflexion d'onde sur une paroi plane). Compte tenu de (7.20) on peut vérifier qu'au voisinage de l'arête du coin les déplacements sont bornés et les contraintes intégrables.

Effectuant le changement de variable $q = s/p$ et posant $b_0 = 0$ dans l'expression (7.20), on la ramène à la forme

$$\Phi_1 = \Phi_a + \frac{\cos l\varphi}{(2\pi i)^2}\int_{c_0 - i\infty}^{c_0 + i\infty} \overline{f(p)}e^{p(r+\tau)}p\,dp \int_L \xi(p, q)\,dq,$$

$$\Psi_1 = \frac{\gamma^2 \sin l\varphi}{(2\pi i)^2}\int_{c_0 - i\infty}^{c_0 + i\infty} \overline{f(p)}e^{p(r_0+\tau)}p\,dp \int_L \zeta(p, q)\,dq, \qquad (7.22)$$

$$\Psi_2 = \frac{\cos l\varphi}{(2\pi i)^2}\int_{c_0 - i\infty}^{c_0 + i\infty} \overline{f(p)}e^{p(r_0+\tau)}\,dp \int_L \zeta(p, q)q\,dq,$$

$$\xi(p, q) = K_l(pr\sqrt{1 - q^2})(1 - q^2)^{\frac{l}{2}} M_0 e^{pqz},$$

$$\zeta(p, q) = K_l(pr\sqrt{\gamma^2 - q^2})(\gamma^2 - q^2)^{\frac{l}{2} - 1} M_0 e^{pqz},$$

$$M_0 \equiv M_0(p, q) = \frac{16}{\pi} lK_l(pr_0\sqrt{1 - q^2})\frac{(1 - q^2)^{\frac{l}{2}}\sin l\pi\cos l\varphi_0}{(1 - q^2)^l + (q^2 + \gamma^2)(\gamma^2 - q^2)^{l-1}}.$$

Le contour L est montré sur la figure 58 où $\alpha_0 = \pi/2 - \arg p$ et les coupures du plan s se transforment en coupures dans le plan q menées le long de l'axe réel des points $\pm\gamma$ et ± 1 vers l'infini (avec $(\gamma^2-q^2)^{1/2}=\gamma$, $(1-q^2)^{1/2}=1$ pour $q = 0$).

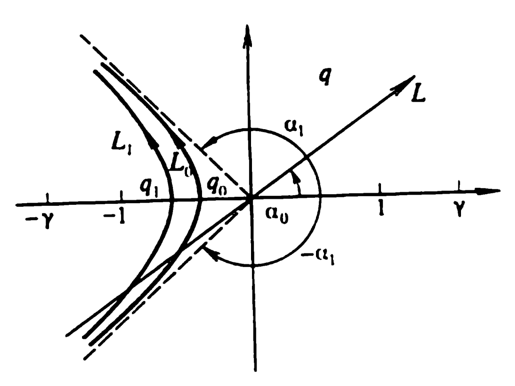


Fig. 58. Contours L_1 et L_0.

Il suffit de considérer les formules (7.22) pour $z > 0$, puisque Φ_1 et Ψ_1 sont des fonctions paires et Ψ_2 une fonction impaire de z (ceci est facile à démontrer à l'aide de (7.22)). On montre alors que pour $z > 0$ le contour L de l'expression de Φ_1 peut être déformé en la courbe L_0, celui des expressions de Ψ_1 et Ψ_2, en la courbe L_1 (fig. 58). Les points de ces courbes vérifient les équations

$$\operatorname{Im} [qz - (r + r_0) (1 - q^2)^{1/2}] = 0 \quad (\text{pour } L_0),$$

$$\operatorname{Im} [qz - r(\gamma^2 - q^2)^{1/2} - r_0(1 - q^2)^{1/2}] = 0 \quad (\text{pour } L_1).$$

Les deux courbes sont symétriques par rapport à l'axe réel et admettent les mêmes asymptotes formant les angles $\pm\alpha_1$ avec l'axe réel : $\operatorname{tg}\alpha_1 = -(r + r_0)/z$. Les points q_0 et q_1 d'intersection de L_0 et L_1 avec l'axe réel sont déterminés respectivement des équations

$$z + (r + r_0)q(1 - q^2)^{-1/2} = 0,$$

$$z + rq(\gamma^2 - q^2)^{-1/2} + r_0q(1 - q^2)^{-1/2} = 0.$$

La fonction $N_0(q, z, r) = qz - (r + r_0) (1 - q^2)^{1/2}$, réelle sur la courbe L_0, admet une valeur maximale au point $q_0 \in L_0$:

$$N(q_0, z, r) = -[z^2 + (r + r_0)^2]^{1/2}.$$

D'une manière analogue la fonction

$$N_1(q, z, r) \equiv qz - r(\gamma^2 - q^2)^{1/2} - r_0 (1 - q^2)^{1/2},$$

réelle sur L_1, admet une valeur maximale au point $q_1 \in L_1$:

$$N_1(q, z, r) = -R_1 \quad (R_1 \equiv R_1(z, r)).$$

Les valeurs q et q_1 tendent vers zéro avec $z \to 0$ et à la limite les courbes L_0 et L_1 se transforment en l'axe imaginaire. De ce fait

pour $z \geqslant 0$ les formules (7.22) deviennent

$$\Phi_1 = \Phi_a + \cos l\theta \int\limits_{L} M_1 (1 - q^2)^{\frac{l}{2} - \frac{1}{4}} dq \int\limits_{-0}^{x_0} f'(x) U(x, q)\, dx,$$

$$\Psi_1 = \gamma^2 \sin l\theta \int\limits_{L_1} M_1 (\gamma^2 - q^2)^{\frac{l}{2} - \frac{5}{4}} dq \int\limits_{-0}^{x_1} f'(x) V(x, q)\, dx,$$

$$\Psi_2 = \cos l\theta \int\limits_{L_1} M_1 (\gamma^2 - q^2)^{\frac{l}{2} - \frac{5}{4}} q\, dq \int\limits_{0}^{x_1} f(x)\, V(x, q)\, dx, \tag{7.23}$$

$$U(x, q) = P_{l-1/2}\left[1 + \frac{(x_0 - x)^2 + 2(x_0 - x)(r + r_0)\sqrt{1 - q^2}}{2rr_0(1 - q^2)}\right],$$

$$V(x, q) = P_{l-1/2}\left[1 + \frac{(x_1 - x)^2 + 2(x_1 - x)(r\sqrt{\gamma^2 - q^2} + r_0\sqrt{1 - q^2}}{2rr_0\sqrt{(1 - q^2)(\gamma^2 - q^2)}}\right],$$

$$M_1 = \frac{4l \sin l\pi \cos l\theta_0 (1 - q^2)^{\frac{l}{2} - \frac{1}{4}}}{\pi i \sqrt{rr_0}\,[(1 - q^2)^l + (q^2 + \gamma^2)(\gamma^2 - q^2)^{l-1}]},$$

$$x_0 = \tau + r_0 + qz - (r + r_0)\sqrt{1 - q^2},$$

$$x_1 = \tau + r_0 + qz - r\sqrt{\gamma^2 - q^2} - r_0\sqrt{1 - q^2}.$$

Ici $P_{l-1/2}(x)$ est une fonction de Legendre de première espèce. La dérivée $f'(x)$ figurant dans les expressions de Φ_1 et Ψ_1 est considérée au sens des distributions. Pour l'établissement de (7.23) on a utilisé la formule d'inversion

$$K_l(ps) K_l(pq) e^{p(s+q)} \doteqdot \frac{\pi}{2\sqrt{sq}} P_{l-1/2}\left[\frac{(\tau + 2s)(\tau + 2q)}{2sq} - 1\right] H(\tau)$$

$$(|\arg s| < \pi,\ |\arg q| < \pi).$$

Remarquons que pour la déduction des relations (7.23) nous avons transformé les chemins d'intégration dans le plan q en les contours L_0 et L_1 le long desquels sont réelles respectivement les fonctions $N_0(q, z, r)$ et $N_1(q_1, z, r)$. Comme nous voyons, les idées de la méthode de Cagniard exposée au § 4 ont trouvé ici application. La lourdeur des expressions (7.23) n'empêche néanmoins pas une étude qualitative des résultats obtenus. De (7.23) nous

trouvons

si $\max\ x_0(q) < 0$ $(\max\ x_0(q) = x_0(q_0) =$

$= \tau + r_0 - [z^2 + (r + r_0)^2]^{1/2})$, alors $\Phi_1 = \Phi_a$;

si $\max\ x_1(q) < 0$ $(\max\ x_1(q) = x_1(q_1) =$

$= \tau + r_0 - R_1)$, alors $\Psi_1 = \Psi_2 = 0$.

Par conséquent

$$\tau + r_0 = [z^2 + (r + r_0)^2]^{1/2}, \quad \tau + r_0 = R_1$$

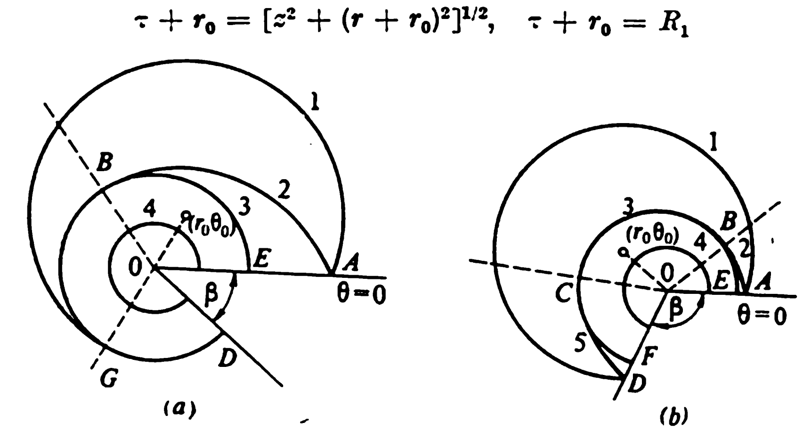


Fig. 59. Domaines perturbés : *a*) avec ombre ; *b*) sans ombre.

sont respectivement les équations des fronts d'ondes de diffraction longitudinales et transversales. Les domaines perturbés dans le plan $z = \text{const}$ $(\tau > (z^2 + r_0^2)^{1/2} - r_0)$ avec et sans ombre sont montrés sur les figures 59, *a* et *b* respectivement, où $\angle BOA = \pi - \theta_0$; $\angle COA = \frac{2\pi}{l} - \pi - \theta_0$, $\angle GOA = \pi + \theta_0$ (les angles sont relevés à partir du rayon OA dans le sens antihoraire), et les fronts *1* à *5* sont donnés respectivement par les expressions : 1) $\tau + r_0 = R(\theta)$, 2) $\tau + r_0 = R(-\theta)$, 3) $\tau + r_0 = \sqrt{z^2 + (r + r_0)^2}$ et 4) $\tau + r_0 = R_1$, 5) $\tau + r_0 = R(2\pi/l - \theta)$, $R(\theta) \equiv R = [z^2 + r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\theta - \theta_0)]^{1/2}$ (la coordonnée θ est comptée à partir du rayon OA dans le sens antihoraire, $\beta = 2\pi - \pi/l$). Dans le plan $z = 0$ les fronts d'ondes de diffraction longitudinales et transversales ont respectivement pour équation $r = \tau$, $r = \tau/\gamma$.

Il convient de noter que la prise en considération des conditions sur l'arête conduit tout d'abord à une différence qualitative entre la solution du problème élastique et celle du problème acoustique correspondant ($\mu = 0$) puisqu'à part l'onde de diffraction longitudinale $\Phi_1 - \Phi_a$ apparaissent des ondes de diffraction

transversales des deux types Ψ_1 et Ψ_2, différant par la direction de la polarisation du vecteur déplacement. Les perturbations complémentaires $\Phi_1 - \Phi_a$, Ψ_1 et Ψ_2 décrivent l'influence de l'élasticité.

Posant dans les formules (7.22) $f(\tau) = r_0 H(\tau)$ et faisant tendre r_0 vers l'infini, on peut montrer que $\Psi_2 \to 0$, alors que Φ_1 et Ψ_1 donnent à la limite la solution du problème concernant la diffraction sur le coin d'une onde longitudinale plane en gradin [56] :

$$\Phi_1 = \Phi_a^0 + \frac{4 \sin l\pi \cos l\theta_0 \cos l\theta}{\pi(1+\gamma^{2l})} \left[P\left(\frac{\tau}{r}\right) - 1/P\left(\frac{\tau}{r}\right) \right] H(\tau - r),$$

$$\Psi_1 = \frac{4\gamma^2 \sin l\pi}{\pi(1+\gamma^{2l})} \cos l\theta_0 \sin l\theta \left[P\left(\frac{\tau}{r\gamma}\right) - 1/P\left(\frac{\tau}{r\gamma}\right) \right] H(\tau - r\gamma),$$

où $P(x) = [x + (x^2-1)^{1/2}]^l$, Φ_a^0 est la solution du problème acoustique correspondant.

Considérons plus en détail le cas le plus intéressant d'onde incidente (7.1), quand $f(\tau) = -\frac{r_0}{2} \tau^2 H(\tau)$. La contrainte subit un saut fini à la traversée du front d'onde :

$$[\sigma_n] = \sigma_n^+ - \sigma_n^- = -(\lambda + 2\mu) r_0 (\tau + r_0)^{-1},$$

n est la normale au front d'onde et les signes « + » et « — » se rapportent respectivement aux domaines situés en arrière et en avant du front d'onde ; pour $r_0 \to \infty$ l'onde considérée se transforme en une onde plane de potentiel

$$\Phi_0 = -\frac{1}{2} [\tau + r\cos(\theta_0 - \theta)]^2 H[\tau + r\cos(\theta - \theta_0)].$$

L'examen de la solution se limite à la considération du cas $0 < \theta_0 < \pi/l - \pi$ (cf. figure 59, *a*) englobant tous les domaines possibles de mouvement perturbé :

domaine d'onde réfléchie $0 < \theta < \pi - \theta_0$, $[(\tau + r_0)^2 - z^2]^{1/2} - r_0 < r$, $\tau + r_0 > R(-\theta)$,

domaine de diffraction $r < [(\tau + r_0)^2 - z^2]^{1/2} - r_0$ et

domaine d'ombre $\pi + \theta_0 < \theta < \pi/l$.

A la traversée du front d'onde réfléchie *2*, au potentiel de l'onde incidente s'ajoute le potentiel de l'onde réfléchie

$$\Phi = -r_0[\tau + r_0 - R(-\theta)]^2 H[\tau + r_0 - R(-\theta)] \frac{1}{2R(-\theta)}$$

et l'on obtient un saut fini de la contrainte normale sur le front d'onde réfléchie égal à $[\sigma_n] = -r_0(\lambda + 2\mu)(\tau + r_0)^{-1}$, car $\partial^2\Phi/\partial n^2$ subit une discontinuité. Lors du passage à travers le front d'onde de diffraction longitudinale *3* les déformations et, par conséquent, les contraintes sont continues, alors que la dérivée des déformations suivant la normale au front $\partial\varepsilon_n/\partial n$ subit une discontinuité de deuxième espèce, car $\partial^3\Phi_1/\partial n^3$ subit une telle discontinuité. A l'approche du front du côté de la région située en avant du front elle admet une singularité de l'ordre de $\varepsilon^{-1/2}$. Par ailleurs, aussi bien la solution acoustique Φ_a que le terme élastique complémentaire présentent des singularités de l'ordre de $\varepsilon^{-1/2}$. Sur le front d'onde transversale *4* les déformations sont continues, alors que subissent une discontinuité de deuxième espèce les dérivées suivant la normale des composantes de déformation $\partial\varepsilon_{\theta n}/\partial n$ et $\partial\varepsilon_{\nu n}/\partial n$ (où ν est compté le long de la ligne d'intersection du front de l'onde transversale avec le plan $\theta =$ $=$ const), puisque sur ce front subissent une discontinuité respectivement les dérivées $\partial^3\Psi_1/\partial n^3$ et $\partial^4\Psi_2/\partial n^4$. A l'approche de l'extérieur ($\tau + r_0 < R_1$) ces dérivées sont finies, alors qu'à l'approche de l'intérieur ($\tau + r_0 > R_1$) elles ont une singularité de l'ordre de $\varepsilon^{-1/2}$.

Il apparaît de l'étude qu'on vient de faire que la partie complémentaire élastique de la solution est de même ordre de grandeur que la partie diffractionnelle de la solution acoustique non seulement au voisinage de l'arête du coin, mais aussi à proximité du front de l'onde de diffraction *3*, et le problème élastique diffère donc notablement du problème acoustique non seulement au voisinage de l'arête du coin mais, en général, dans tout le domaine de diffraction $r + r_0 < [(\tau + r_0)^2 - z^2]^{1/2}$.

De la solution obtenue pour les angles d'ouverture du coin $\beta = 2\pi - \pi/l$ ($1/2 \leqslant l < 1$) vérifiant la condition $\beta < \pi$, on peut obtenir la solution pour les angles d'ouverture $\beta \geqslant \pi$. En effet, la partie de la solution (7.22) symétrique par rapport au plan bissecteur du coin (que nous notons Φ_1^s et Ψ_j^s, $j = 1, 2$) vérifie sur le plan bissecteur les conditions

$$\frac{\partial\Phi_1^s}{\partial\theta} = \Psi_1^s = \frac{\partial\Psi_r^s}{\partial\theta} = 0$$

et, par conséquent, donne la solution du problème de diffraction d'une onde sphérique élastique sur un coin d'angle d'ouverture $\beta_1 = 2\pi - \pi/l_1$, où $l_1 = 2l$ ($1 \leqslant l_1 < 2$). Ici l'angle β_1 vérifie les conditions $\pi \leqslant \beta_1 < 3\pi/2$. Prenant à nouveau la partie symétrique de la solution pour un coin d'angle d'ouverture β_1, nous obtenons la solution pour l'angle $\beta_2 = 2\pi - \pi/l_2$ ($2 \leqslant l_2 = 2l_1 < 4$), vérifiant l'inégalité $3\pi/2 \leqslant \beta_2 < 7\pi/4$, et ainsi de suite. Après

une n-ième opération nous obtenons la solution pour l'angle du coin $\beta_n = 2\pi - \pi/l_n$ $(2^{n-1} \leqslant l_n = 2^n l < 2^n)$ vérifiant la condition

$$2\pi - \frac{\pi}{2^{n-1}} \leqslant \beta_n < 2\pi - \frac{\pi}{2^n}.$$

On peut obtenir ainsi la solution pour tout angle d'ouverture du coin β dans les limites de $0 \leqslant \beta < 2\pi$ et comme il découle de [121] les termes complémentaires dans la solution acoustique s'annulent.

§ 8. Interaction de l'onde de cisaillement avec une inclusion cylindrique

Considérons le problème d'action d'une onde de cisaillement harmonique plane sur une inclusion cylindrique solide adhérant sur une partie de sa surface au milieu élastique [104].

Soit dans un espace élastique une cavité cylindrique de rayon a, dont l'axe est pris pour l'axe z dans les repères cylindrique et cartésien. Dans la cavité on insère un cylindre solide de telle sorte que sur la partie $r = a$, $|\theta| > \alpha$, $-\infty < z < \infty$ de la frontière il y a adhérence et sur la partie restante $r = a$, $|\theta| < \alpha$ les contraintes s'annulent.

Supposons qu'à l'infini la solution est de la forme

$$w^* = w_0 e^{-i\omega t - ikx} \quad \left(k = \frac{\omega}{b}\right) \tag{8.1}$$

(les composantes u^* et v^* s'annulent). Alors pour l'amplitude complexe nous avons à l'infini

$$\bar{w}^* = w_0 e^{-ikr\cos\theta}. \tag{8.1'}$$

Les conditions à l'infini et les conditions aux limites données sur la pièce cylindrique impliquent que partout dans le corps élastique est non nulle seule la composante w qui doit vérifier l'équation

$$\nabla^2 w - \frac{1}{b^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad \left(\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right). \tag{8.2}$$

Pour l'amplitude nous avons respectivement l'équation

$$\nabla^2 \bar{w} + k^2 \bar{w} = 0. \tag{8.2'}$$

Nous chercherons la solution du problème posé sous la forme $w + w^*$, le déplacement w devant comme auparavant vérifier l'équation (8.2) ainsi que les conditions de rayonnement (1.15), ch. III. L'amplitude $\bar{w}$ peut être recherchée sous la forme d'une série :

$$\bar{w} = A_0 \frac{H_0^{(1)}(kr)}{H_0^{(1)}(ka)} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{H_n^{(1)}(kr)}{H_n^{(1)}(ka)} \cos n\theta, \tag{8.3}$$

où $H_n^{(1)}(x)$ est une fonction de Hankel.

Nous supposerons que la pièce reste immobile. Dans ce cas nous obtenons sur le contour $r = a$ la condition suivante

$$\bar{w}(a, \theta) = -\bar{w}^*(a, \theta) \quad (\alpha < \theta \leqslant \pi). \tag{8.4}$$

A part cela, naturellement, doit être vérifiée la condition

$$\bar{\tau}_{rz}(a, \theta) = -\bar{\tau}_{rz}^*(a, \theta) \quad (0 < \theta \leqslant \alpha). \tag{8.5}$$

Conformément à (8.3) nous obtenons pour $\bar{\tau}_{rz}(r, \theta)$ la représentation

$$\frac{1}{\mu} \bar{\tau}_{rz}(r, \theta) = -A_0 \frac{kH_1^{(1)}(kr)}{H_0^{(1)}(ka)} + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left[-\frac{kH_{n+1}^{(1)}(kr)}{H_n^{(1)}(ka)} + \frac{nH_n^{(1)}(kr)}{rH_n^{(1)}(ka)} \right] \cos n\theta. \tag{8.6}$$

A l'aide de (8.3) et (8.6) nous pouvons récrire les conditions aux limites (8.4) et (8.5) sous la forme d'équations duales en séries

$$-A_0 \frac{kaH_1^{(1)}(ka)}{H_0^{(1)}(ka)} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left[n - \frac{kaH_{n+1}^{(1)}(ka)}{H_1^{(1)}(ka)} \right] \cos n\theta = \\ = ikaw_0 e^{-ika\cos\theta} \quad (0 \leqslant \theta \leqslant \alpha), \tag{8.7}$$

$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\theta = -w_0 e^{-ika\cos\theta} \quad (\alpha < \theta \leqslant \pi). \tag{8.8}$$

Pour résoudre ces équations nous allons utiliser la solution exacte d'une classe spéciale d'équations duales en séries (5.13), ch. I. Désignons le premier membre de l'équation (8.7) pour $\alpha < \theta \leqslant \pi$ par

$$\frac{a}{\mu} \bar{\tau}(\theta) + ikaw_0 \cos\theta \, e^{-ika\cos\theta}.$$

Ici $\bar{\tau}(\theta)$ est l'amplitude, sur le contour $r = a$, $\alpha < \theta \leqslant \pi$, des contraintes tangentielles correspondant au champ de l'onde perturbée. Remplaçons l'égalité (8.7) par l'égalité approchée de la

forme (N est un certain nombre donné)

$$A_0 \frac{kaH_1^{(1)}(ka)}{H_0^{(1)}(ka)} + \sum_{n=1}^{\infty} nA_n \cos n\theta + \sum_{n=1}^{N} A_n \left[\frac{kaH_{n+1}^{(1)}(ka)}{H_n^{(1)}(ka)} - 2n \right] \cos n\theta =$$

$$= \begin{cases} -ikaw_0 \cos\theta\, e^{-ika\cos\theta} & (0 \leqslant \theta < \alpha), \\ -\dfrac{1}{\mu}\, \tau(\theta) - ikaw_0 \cos\theta\, e^{-ika\cos\theta} & (\alpha < \theta \leqslant \pi). \end{cases} \tag{8.9}$$

Il est utile de noter l'égalité

$$\lim_{k\to 0} \left[\frac{kaH_{n+1}^{(1)}(ka)}{H_n^{(1)}(ka)} - 2n \right] = 0. \tag{8.10}$$

Développant le second membre de (8.9) en série de Fourier, nous sommes conduits aux expressions des coefficients

$$A_0 \frac{kaH_1^{(1)}(ka)}{H_0^{(1)}(ka)} = -kaw_0 J_1(ka) - \frac{a}{\pi\mu} \int_{\alpha}^{\pi} \tau(\theta)\, d\theta,$$

$$A_n = -\frac{2a}{\pi\mu n}(1 - h_n) \int_{\alpha}^{\pi} \tau(t) \cos nt\, dt -$$

$$- w_0\, ka \frac{2}{n} (-1)^{n-1} i^n J_n'(ka)(1 - h_n) \quad (n = 1, 2, \ldots, N), \tag{8.11}$$

$$A_n = -\frac{2a}{\pi\mu n} \int_{\alpha}^{\pi} \tau(t) \cos nt\, dt - w_0\, ka \frac{2}{n} (-1)^{n-1} i^n J_n'(ka) \quad (n > N).$$

Ici on note

$$h_n = \frac{kaH_{n+1}^{(1)}(ka) - 2nH_n^{(1)}(ka)}{kaH_{n+1}^{(1)}(ka) - nH_n^{(1)}(ka)}.$$

Pour la déduction des formules précédentes nous avons utilisé l'identité

$$\int_0^{\pi} \cos t \cos nt e^{-ika\cos t}\, dt = \pi(-1)^{n-1} i^{n-1} J_n'(ka).$$

Portant (8.11) dans l'équation (8.8) et changeant l'ordre d'intégration et de sommation, nous obtenons l'égalité

$$\frac{2a}{\pi\mu}\int_{\alpha}^{\pi}\tau(t)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nt\cos n\theta}{n}\right)dt-\frac{2a}{\mu\pi}\sum_{n=1}^{N}\frac{h_n}{n}\left(\int_{\alpha}^{\pi}\tau(t)\cos nt\,dt\right)\cos n\theta=$$

$$=A_0+w_0J_0(ka)+2w_0ka\sum_{n=1}^{\infty}(-i)^n\frac{J_{n-1}(ka)}{n}\cos n\theta-$$

$$-2w_0ka\sum_{n=1}^{N}(-i)^n\frac{h_n}{n}J_n'(ka)\cos n\theta. \quad (8.12)$$

Pour sa déduction nous nous sommes servi de l'identité

$$e^{-ika\cos\theta}=J_0(ka)+2\sum_{n=1}^{\infty}(-i)^nJ_n(ka)\cos n\theta.$$

Conformément à [40] (cf. § 5, ch. I), introduisons de nouvelles variables ξ et φ d'après les formules

$$\cos t=\beta+\beta'\cos\xi,\quad \cos\theta=\beta+\beta'\cos\varphi,$$
$$\beta=\frac{1}{2}(\cos\alpha-1),\quad \beta'=\frac{1}{2}(\cos\alpha+1). \quad (8.13)$$

Il est évident que lorsque ξ et φ varient entre 0 et π, les variables t et θ varient entre α et π. (8.13) permet d'écrire

$$\frac{dt}{d\xi}=\frac{\sqrt{\cos\alpha-\cos t}}{\sqrt{2}\sin\frac{t}{2}},\quad \frac{d\theta}{d\varphi}=\frac{\sqrt{\cos\alpha-\cos\theta}}{\sqrt{2}\sin\frac{\theta}{2}} \quad (8.14)$$

$$(\alpha<t<\pi,\quad \alpha<\theta<\pi).$$

La fonction $\tau(t(\xi))\frac{dt}{d\xi}$ peut être développée en série de Fourier dans l'intervalle $0\leqslant\xi\leqslant\pi$:

$$\tau(t)\frac{dt}{d\xi}=\mu\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\cos(n-1)\xi. \quad (8.15)$$

Compte tenu de (8.14) nous obtenons

$$\tau(\theta)|_{\theta>\alpha}=\mu\frac{\sqrt{2}\sin\frac{\theta}{2}}{\sqrt{\cos\alpha-\cos\theta}}\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\cos(n-1)\varphi. \quad (8.16)$$

où

$$\varphi = \arc\cos\left(\frac{\cos\theta - \beta}{\beta_1}\right).$$

Utilisant le développement (8.15) et l'égalité

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nt \cos n\theta}{n} = -\frac{1}{2}\ln|\cos t - \cos\theta| =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\beta' + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\xi \cos n\varphi}{n},$$

on peut représenter le premier terme du second membre de (8.12) sous la forme

$$\frac{2a}{\pi\mu}\int_{\alpha}^{\pi}\tau(t)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nt\cos n\theta}{n}\right)dt = \frac{2a}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\cos(n-1)\xi\right)\times$$

$$\times\left(-\frac{1}{2}\ln\beta' + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\varphi\cos n\xi}{n}\right)d\xi = a\sum_{m=1}^{\infty}b_m\alpha_m\cos(m-1)\varphi, \quad (8.17)$$

où

$$b_1 = -\ln\beta', \quad b_m = \frac{1}{m-1} \quad (m = 2, 3, \ldots).$$

Pour transformer le second terme du second membre de (8.12) nous aurons besoin des expressions suivantes :

$$\cos nt = \cos nt(\xi) = \sum_{m=1}^{n+1} c_m^{(n)}\cos(m-1)\xi,$$

$$\cos n\theta = \cos n\theta(\varphi) = \sum_{m=1}^{n+1} c_m^{(n)}\cos(m-1)\varphi. \quad (8.18)$$

Comme

$$\cos n\theta = \cos n[\arc\cos(\beta + \beta'\cos\varphi)] = T_n(\beta + \beta'\cos\varphi),$$

où $T_n(x)$ est un polynôme de Tchébychev, les coefficients $c_m^{(n)}$ peuvent être aisément déterminés à l'aide des expressions appropriées des polynômes $T_n(x)$. En particulier, pour $n = 1$ et $n = 2$ nous obtenons

$$c_1^{(1)} = \beta, \quad c_2^{(1)} = \beta', \quad c_1^{(2)} = (2\beta^2 - 1 + \beta'^2), \quad c_2^{(2)} = 4\beta\beta', \quad c_3^{(2)} = \beta'^2.$$

Donc, compte tenu de (8.18) et (8.15) nous aurons

$$\frac{2a}{\pi\mu}\int_{\alpha}^{\pi}\overline{\tau}(t)\cos nt\,dt = \frac{2a}{\pi\mu}\int_{0}^{\pi}\overline{\tau}(t(\xi))\frac{dt}{d\xi}\cos nt(\xi)\,d\xi =$$

$$= a\sum_{j=1}^{N+1}\varepsilon_j\alpha_j c_j^{(n)},\quad \varepsilon_1=2,\quad \varepsilon_j=1\quad (j=2,3,\ldots). \qquad (8.19)$$

Portant (8.17) et (8.19) dans (8.12) et utilisant (8.18), nous écrivons l'équation (8.12) sous la forme

$$\sum_{m=1}^{\infty} b_m\alpha_m\cos(m-1)\varphi - \sum_{m=1}^{N+1}\left(\sum_{j=1}^{N+1}\alpha_j D_{jm}\right)\cos(m-1)\varphi =$$

$$= \frac{1}{a}\left[A_0 + w_0 J_0(ka)\right] + \frac{2w_0}{a}\sum_{m=1}^{\infty} P_m\cos(m-1)\varphi -$$

$$- \frac{2w_0}{a}\sum_{m=1}^{N+1} Q_m\cos(m-1)\varphi. \qquad (8.20)$$

On note ici

$$D_{jm} = \varepsilon_j\sum_{n=1}^{N}\frac{h_n}{n}c_j^{(n)}c_m^{(n)},$$

$$P_m = -\sum_{n=1}^{\infty}(-i)^n\frac{ka}{n}J_{n-1}(ka)\,c_m^{(n)},$$

$$Q_m = -\sum_{n=1}^{N}(-i)^n\frac{h_n}{n}kaJ_n'(ka)\,c_m^{(n)}.$$

La variable φ variant entre 0 et π, l'égalité (8.20) nous fournit un système de $N+1$ équations pour déterminer les constantes α_m :

$$b_m\alpha_m - \sum_{j=1}^{N+1}\alpha_j D_{jm} = \frac{2w_0}{a}(Q_m - P_m) + \left(\frac{w_0}{a}J_0(ka) + \frac{A_0}{a}\right)\delta_{1m}$$

$$(m=1,2,\ldots,N+1),\quad \delta_{11}=1,\quad \delta_{1m}=0\quad (m=2,3,\ldots), \qquad (8.21)$$

$$b_m\alpha_m = -2\frac{w_0}{a}P_m\quad (m > N+1).$$

Portant (8.15) dans (8.11) nous obtenons

$$A_0 = -w_0\frac{J_1(ka)H_0^{(1)}(ka)}{H_1^{(1)}(ka)} - a\frac{H_0^{(1)}(ka)}{kaH_1^{(1)}(ka)}\alpha_1. \qquad (8.22)$$

Compte tenu de (8.22), le système (8.21) prend la forme

$$b'_m \alpha_m - \sum_{j=1}^{N+1} \alpha_j D_{jm} = 2\frac{w_0}{a}(Q_m - P_m) + \\ + \frac{w_0}{a}\left[J_0(ka) - \frac{J_1(ka)H_0^{(1)}(ka)}{H_1^{(1)}(ka)}\right]\delta_{1m}. \quad (8.23)$$

Ici

$$b'_1 = -\ln \beta' + \frac{H_0^{(1)}(ka)}{kaH_1^{(1)}(ka)},$$

$$b'_m = b_m = \frac{1}{m-1} \quad (m = 2, 3, \ldots, N+1).$$

La solution ainsi construite des équations duales (8.7), (8.8) est approchée et dépend du nombre N. Il est évident qu'avec l'accroissement de N cette solution approchée peut être rendue aussi proche que l'on veut de la solution exacte.

Présente de l'intérêt la connaissance du coefficient dynamique d'intensité des contraintes au sommet de la fissure passant par la frontière de séparation de la pièce solide et du milieu élastique.

Il est aisé de voir que la partie de l'expression du champ global des contraintes qui contient une singularité se détermine par la relation (8.16). Donc, le coefficient dynamique d'intensité des contraintes

$$K_3 = K'_3 + iK''_3 = \\ = \sqrt{2\pi a}\lim_{\theta\to\alpha}[\sqrt{\theta-\alpha}\,\tau(\theta)] = \\ = \mu\sqrt{2\pi \operatorname{atg}\frac{\alpha}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n. \quad (8.24)$$

Sur la figure 60 sont représentés les résultats du calcul de la grandeur $K^* = \frac{|K_3|}{\mu\sqrt{2\pi a}}\frac{a}{w_0}$ en fonction du nombre d'onde adimensionnel ka pour $\alpha = \alpha_1 = \pi/4$ et $\alpha = \alpha_2 = \pi/18$. La courbe rapportée pour $\alpha = \pi/4$ accuse un maximum pour $ka \approx 1{,}25$, ce qui est caractéristique pour les problèmes de ce type [40, 139].

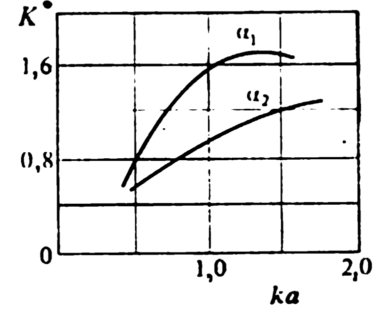


Fig. 60. Le coefficient K^* en fonction du nombre d'onde ka.

§ 9. Torsion et extension d'un cylindre à coupure extérieure annulaire

1. Considérons un cylindre circulaire plein de rayon unité ayant une entaille annulaire de diamètre intérieur $2a$ soumis à

l'action de deux couples de torsion opposés M (fig. 61) [60]. Le cylindre est reporté à un repère cylindrique (r, θ, z) ayant son centre dans le plan de la coupure. La surface latérale du cylindre et la surface de la coupure sont supposées libres.

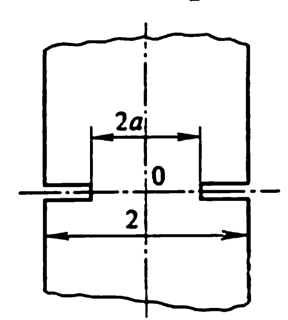


Fig. 61. Cylindre à coupure circulaire.

Les contraintes tangentielles qui figurent dans la solution élémentaire du problème sur la torsion d'un arbre de rayon unité s'expriment de la façon suivante :

$$\tau_{\theta z}^{(0)} = \frac{2M}{\pi} r, \quad \tau_{r\theta}^{(0)} = 0. \tag{9.1}$$

Pour que soit réalisée l'hypothèse selon laquelle la surface de la coupure est libre de contraintes il faut considérer un état de contrainte complémentaire qui ne dépend pas de la coordonnée angulaire θ et se caractérise par la seule composante des déplacements $u_\theta = u(r, z) \neq 0$ vérifiant l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \tag{9.2}$$

Les contraintes tangentielles se déterminent par les formules

$$\tau_{\theta z}^{(1)} = \mu \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \tau_{r\theta}^{(1)} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r}\right). \tag{9.3}$$

Considérons un cylindre semi-infini ($z \geqslant 0$) et représentons la solution de l'équation (9.2) sous la forme

$$u(r, z) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n J_1(\lambda_n z)}{\lambda_n} e^{-\lambda_n r}. \tag{9.4}$$

Ici $J_1(\lambda_n z)$ est une fonction de Bessel de première espèce, λ_n les racines de l'équation

$$\lambda_n J_1'(\lambda_n) - J_1(\lambda_n) = -\lambda_n J_2(\lambda_n) = 0.$$

Les contraintes tangentielles sont nulles sur la surface latérale et se déterminent sur la base $z = 0$ selon (9.3), (9.4) de la manière suivante

$$\tau_{\theta z}^{(1)} = \mu\frac{\partial u}{\partial z} = -2\mu\sum_{n=1}^{\infty} B_n J_1(\lambda_n r), \quad z = 0. \tag{9.5}$$

Les conditions aux limites dans le plan $z = 0$ sont :

$$\begin{aligned} \tau_{\theta z}^{(1)}(r, 0) &= -\tau_{\theta z}^{(0)}(r, 0) \quad (a < r \leqslant 1), \\ u(r, 0) &= 0 \quad (0 \leqslant r < a). \end{aligned} \tag{9.6}$$

Les relations (9.4), (9.5) associées à ces conditions aux limites nous conduisent aux équations duales en séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{\lambda_n} J_1(\lambda_n r) = 0 \quad (0 \leqslant r < a), \tag{9.7}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n J_1(\lambda_n r) = \frac{M}{\pi\mu} r \quad (a < r \leqslant 1). \tag{9.8}$$

Conformément à [147], posons

$$-\frac{M}{\pi\mu} r + \sum_{n=1}^{\infty} B_n J_1(\lambda_n r) = -\frac{\partial}{\partial r} \int_r^a \frac{g(t)\, dt}{\sqrt{t^2 - r^2}} \quad (r < a). \tag{9.9}$$

A l'aide des égalités (9.8), (9.9) nous trouvons alors

$$B_n = 2J_1^{-2}(\lambda_n) \int_0^a g(u) \sin(\lambda_n u)\, du, \tag{9.10}$$

$$-\frac{M}{\pi\mu} = 8 \int_0^a u g(u)\, du. \tag{9.11}$$

La fonction $g(u)$ vérifie l'équation intégrale de Fredholm de deuxième espèce à noyau symétrique

$$g(t) = \int_0^a g(u) K(u, t)\, dt + \frac{16}{\pi} t \int_0^a u g(u)\, du, \tag{9.12}$$

$$K(u, t) = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{K_2(y)}{I_2(y)} [8\, ut\, I_2(y) - \operatorname{sh}(ty) \operatorname{sh}(uy)]\, dy. \tag{9.13}$$

Ici $I_n(y)$, $K_n(y)$ sont des fonctions modifiées de Bessel, respectivement de première et de deuxième espèce.

Utilisant les développements en séries de puissances des fonctions $\operatorname{sh}(ty)$, $\operatorname{sh}(uy)$ et $I_2(y)$, représentons le noyau de l'équation

(9.12) sous la forme

$$K(u, t) = -\sum_{k=0}^{\infty} t^{2k+1} b_{2k+1}(u), \tag{9.14}$$

$$b_1(u) = \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n \left[\frac{u^{2n-1}}{(2n-1)!} - \frac{u}{2^{2n-3}(n-1)!\,(n+1)!} \right],$$

$$b_{2k+1}(u) = \frac{1}{(2k+1)!} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\alpha_{n-k-1}\, u^{2n-3}}{(2n-3)!} \quad (k = 1, 2, \ldots), \tag{9.15}$$

$$\alpha_n = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{K_2(y)}{I_2(y)} y^{2n}\, dy \quad (n = 2, 3, \ldots). \tag{9.16}$$

Tenant compte du développement (9.14) nous chercherons la solution de l'équation intégrale (9.12) sous la forme

$$g(t) = C(a) \sum_{m=0}^{\infty} P_{2m+1} t^{2m+1}. \tag{9.17}$$

Les constantes P_{2m+1} figurant dans (9.17) sont tirées de la solution du système infini d'équations algébriques

$$P_{2m+1} = -\sum_{k=0}^{\infty} P_{2k+1} C_{2k+1,\,2m+1} + \delta_m^0 \quad (m = 0, 1, 2, \ldots). \tag{9.18}$$

Ici

$$C_{2k+1,1} = \\ = \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n \left[\frac{a^{2k+2n+1}}{(2k+2n+1)(2n-1)!} - \frac{a^{2k+3}}{2^{2n-3}(2k+3)(n-1)!\,(n+1)!} \right],$$

$$C_{2k+1,\,2m+1} = \\ = \int_0^a u^{2k+1} b_{2m+1}(u)\, du = \frac{1}{(2m+1)!} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\alpha_{n+m-1}\, a^{2k+2n-1}}{(2k+2n+1)(2n-3)!} \tag{9.19}$$

$$(k = 0, 1, 2, \ldots;\ m = 1, 2, 3, \ldots), \quad \delta_m^0 = \begin{cases} 1, & m = 0, \\ 0, & m = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

La constante $C(a)$ est déterminée de l'égalité (9.11) et du développement (9.17) ;

$$C(a) \sum_{m=0}^{\infty} P_{2m+1} \frac{a^{2m+3}}{2m+3} = -\frac{M}{8\pi\mu}. \tag{9.20}$$

Le système (9.18) est quasi régulier (cf. § 15, ch.I). Pour le montrer, démontrons tout d'abord que

$$\lim_{m\to\infty} b_{2m+1}(u) = 0 \quad (0 \leqslant u < 1). \qquad (9.21)$$

Portons l'expression des coefficients α_n dans la série déterminant $b_{2m+1}(u)$ et changeons l'ordre de sommation et d'intégration. Nous obtenons

$$b_{2m+1}(u) = \frac{4}{\pi^2(2m+1)!}\int_0^\infty \frac{K_2(y)}{I_2(y)}\, y^{2m+1}\,\mathrm{sh}(uy)\,dy \ (m = 1, 2, \ldots).$$

Les développements asymptotiques pour les fonctions modifiées de Bessel donnent d'autre part pour de grands m

$$b_{2m+1}(u) \sim \frac{2}{\pi(2-u)^{2m+1}}\left[1 + \frac{15(2-u)}{4(2m+1)} + \frac{225(2-u)^2}{32\,(2m+1)2m} + \ldots\right] -$$
$$- \frac{2}{\pi(2+u)^{2m+1}}\left[1 + \frac{15(2+u)}{4(2m+1)} + \frac{225\,(2+u)^2}{32(2m+1)2m} + \ldots\right]. \qquad (9.22)$$

D'où découle (9.21).

Notons que les valeurs des α_n pour de grands n peuvent également être déterminées par la formule asymptotique

$$\alpha_n \sim \frac{(2n)!}{2^{2n-1}\pi}\left[1 + \frac{15}{4}\,\frac{2}{2n} + \frac{225}{32}\,\frac{2^2}{(2n-1)(2n)} + \ldots\right]. \qquad (9.23)$$

Dans le tableau 2 sont données les valeurs des α_n, $n = 2$ à 15, calculées d'après (9.16) (première ligne) et (9.23).

Tableau 2

2	3	4	5	6	7	8
$117\cdot10^{-1}$ $80\cdot10^{-1}$	$297\cdot10^{-1}$ $274\cdot10^{-1}$	276 267	$498\cdot10^{1}$ $489\cdot10^{1}$	$142\cdot10^{3}$ $141\cdot10^{3}$	$587\cdot10^{4}$ $584\cdot10^{4}$	$326\cdot10^{6}$ $327\cdot10^{6}$
9	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
$235\cdot10^{8}$ $237\cdot10^{8}$	$212\cdot10^{10}$ $216\cdot10^{10}$	$235\cdot10^{12}$ $241\cdot10^{12}$	$312\cdot10^{14}$ $323\cdot10^{14}$	$490\cdot10^{16}$ $511\cdot10^{16}$	$894\cdot10^{18}$ $946\cdot10^{18}$	$189\cdot10^{21}$ $202\cdot10^{21}$

On voit que pour $n \geqslant 5$ les valeurs exactes et asymptotiques diffèrent de façon insignifiante.

Estimant les coefficients du système infini (9.18), nous trouvons

$$|C_{2k+1,\,2m+1}| \leqslant |b_{2m+1}(a_1)|\,\frac{a^{2k+2}}{2k+2} \quad (0 \leqslant a_1 \leqslant a < 1).$$

Par conséquent,

$$S_{2m+1} = \sum_{k=1}^{\infty} |C_{2k+1,\,2m+1}| \leqslant \frac{1}{2}\,|b_{2m+1}(a_1)|\,|\ln(1-a^2) + a^2|. \qquad (9.24)$$

On tire des relations (9.23), (9.24) qu'à partir d'un certain numéro $m = m'$ a lieu l'inégalité

$$S_{2m+1} < 1, \quad m \geqslant m'.$$

Le système (9.18) est donc quasi régulier pour $0 \leqslant a < 1$ et la constante m' est d'autant plus grande que a est proche de 1.

Afin de déterminer les contraintes tangentielles sur le prolongement de la coupure utilisons les relations (9.5), (9.9) :

$$\tau_{\theta z}^{(1)}(r, 0) = -\frac{2}{\pi} Mr + 2\mu \frac{\partial}{\partial r} \int_r^a \frac{g(t)\, dt}{\sqrt{t^2 - r^2}} \quad (r < a). \qquad (9.25)$$

Portant les expressions (9.17), (9.20) dans (9.25) on peut montrer que la contrainte tangentielle $\tau_{\theta z}^{(1)}$ présente sur le prolongement de la coupure une singularité de la forme suivante :

$$\tau_{\theta z}^{(1)}(r, 0) = -\frac{2\mu C(a)}{\sqrt{a^2 - r^2}} \sum_{m=0}^{\infty} P_{2m+1} r^{2m+1} + \ldots \quad (r < a) \qquad (9.26)$$

Compte tenu de (9.26), déterminons le coefficient d'intensité des contraintes au sommet de la coupure :

$$K_{III} = \lim_{r \to a} [\sqrt{2\pi (a - r)}\, \tau_{\theta z}(r, 0)] = -2\mu \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, g(a) \quad (r < a). \qquad (9.27)$$

Utilisant le développement (9.17), on peut écrire

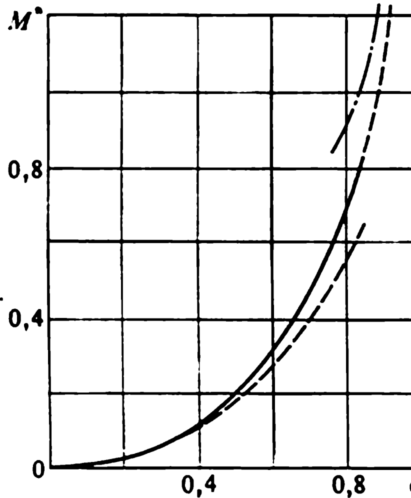


Fig. 62. Moment M^* en fonction de $\alpha = a/R$.

$$K_{III} = \frac{M}{4\sqrt{\pi a}} \left(\sum_{m=0}^{\infty} P_{2m+1} a^{2m+1} \right) \times \\ \times \left(\sum_{m=0}^{\infty} P_{2m+1} \frac{a^{2m+3}}{2m+3} \right)^{-1}. \qquad (9.28)$$

Sur la figure 62 par une ligne continue est représentée la dépendance du moment $M^* = 3/4\, M \pi^{-1/2} R^{-5/2} K_{IIIc}^{-1}$ par rapport au rayon adimensionnel $\alpha = a/R$ du sommet de la fissure (R est le rayon du cylindre introduit à la place du rayon unité).

Nous voyons que pour de petits a (fissure annulaire profonde) $P_1 \sim 1$, $P_{2k+1} \sim 0$ ($k =$

$= 1, 2, \ldots$), et (9.28) donne lieu à l'égalité approximative suivante :

$$K_{\rm III} \sim \frac{3}{4} M \pi^{-1/2} a^{-5/2}. \tag{9.29}$$

Ce résultat (ligne en pointillé sur la figure 62) découle de la solution de Neuber [97] du problème de torsion d'un corps de révolution à rainure extérieure.

Le cas de rainures de petite profondeur sur la surface du cylindre peut, au contraire, être assimilé au demi-plan avec une coupure émergeant sur sa frontière, dans des conditions d'une déformation antiplane (fig. 63). Les conditions aux limites sont alors :

$$\tau_{zx} = 0 \ (x = 0), \quad u = 0 \ (y = 0, 1 - a \leqslant x),$$
$$\tau_{zy} = -\frac{2M}{\pi}(1 - x) \ (y = 0, \ 0 \leqslant x \leqslant 1 - a). \tag{9.30}$$

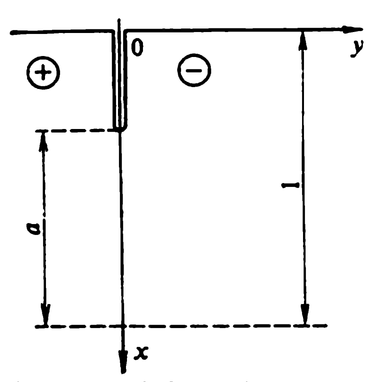


Fig. 63. Demi-plan présentant une coupure.

La dernière condition correspond aux contraintes (avec le signe contraire) s'exerçant à l'endroit d'une rainure peu profonde lors d'une torsion d'un cylindre plein de rayon unité.

Représentons les composantes des déplacements et des contraintes sous la forme suivante :

$$u(x, y) = \int_0^\infty A(\lambda) e^{-\lambda y} \cos \lambda x \, d\lambda,$$

$$\tau_{zx} = -\mu \int_0^\infty \lambda A(\lambda) \, e^{-\lambda y} \sin \lambda x \, d\lambda,$$

$$\tau_{zy} = -\mu \int_0^\infty \lambda A(\lambda) \, e^{-\lambda y} \cos \lambda x \, d\lambda.$$

Intégrant τ_{zy} par rapport à x pour les conditions aux limites (9.30) nous obtenons :

$$\int_0^\infty A(\lambda)\sin\lambda x\, d\lambda = \frac{2M}{\pi\mu}\left(x - \frac{x^2}{2}\right) \quad (0 \leqslant x < 1 - a),$$

$$\int_0^\infty A(\lambda)\cos\lambda x\, d\lambda = 0 \quad (x > 1 - a).$$

Introduisons une nouvelle fonction inconnue $L(t)$:

$$A(\lambda) = \int_0^{1-a} L(t)\, J_0(\lambda t)\, dt.$$

Alors

$$\int_0^x \frac{L(t)\,dt}{\sqrt{x^2 - t^2}} = \frac{2M}{\pi\mu}\left(x - \frac{x^2}{2}\right), \quad L(t) = \frac{2M}{\pi\mu}\left(t - \frac{2}{\pi}t^2\right),$$

$$\tau_{zy}(x, 0) = -\mu\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\infty A(\lambda)\sin\lambda x\, d\lambda =$$

$$= -\mu\frac{\partial}{\partial x}\int_0^{1-a} L(t)\left[\int_0^\infty J_0(\lambda t)\sin\lambda x\, d\lambda\right] dt =$$

$$= -\frac{2M}{\pi}(1 - x) - \delta\mu\frac{\partial}{\partial x}\int_0^{1-a}\frac{L(t)\,dt}{\sqrt{x^2 - t^2}}, \quad (9.31)$$

$$\delta = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x < 1 - a, \\ 1, & x > 1 - a. \end{cases}$$

Compte tenu de (9.31) l'expression des contraintes tangentielles sur le prolongement de la coupure s'écrit

$$\tau_{zy}(x, 0) = \frac{2Mx}{\pi\sqrt{x^2(1-a)^2}}\left[1 - \frac{2(1-a)}{\pi}\right] + \ldots \quad (x > 1 - a). \quad (9.32)$$

Ici sont négligés les termes tendant vers une limite finie pour $x \to 1 - a$. Compte tenu de (9.32) le coefficient d'intensité des

contraintes est égal à :

$$K_{\text{III}} = \lim_{x \to 1-a} \sqrt{2\pi[x-(1-a)]}\,\tau_{zy}(x, 0) = 2M\sqrt{\frac{1-a}{\pi}}\left[1 - \frac{2(1-a)}{\pi}\right]. \tag{9.33}$$

Dans le cas limite il en résulte

$$M^* = \frac{3M}{4\sqrt{\pi}K_{\text{III}C}} = \frac{3}{8\sqrt{1-\alpha}\,[1-2\pi^{-1}(1-\alpha)]} \quad \left(\alpha = \frac{a}{R}\right). \tag{9.34}$$

Sur la figure 62 la relation (9.34) est représentée en trait interrompu mixte; R est la dimension caractéristique introduite à la place de l'unité.

Réunissant toutes les trois solutions: exacte (9.27), (9.29) pour une coupure profonde et (9.33) pour une petite rainure, nous pouvons écrire:

$$K_{\text{III}} = \tau_{\max}\sqrt{\pi R}\,F(\alpha), \quad \tau_{\max} = \frac{2M}{\pi a^3}, \quad \alpha = \frac{a}{R}, \tag{9.35}$$

$$F(\alpha) = \frac{3}{8}\,\alpha^3(M^*)^{-1} \quad \text{(solution exacte)},$$

$$F(\alpha) = F_N(\alpha) = \frac{3}{8}\,\alpha^{1/2} \quad \text{(coupure profonde)},$$

$$F(\alpha) = F_A(\alpha) = \alpha^3(1-\alpha)^{1/2}\left[1 - \frac{2}{\pi}(1-\alpha)\right] \quad \text{(petite rainure)}.$$

Dans le tableau 3 sont représentées les valeurs de $F(\alpha)$, $F_N(\alpha)$, $F_A(\alpha)$.

Tableau 3

α		0.1	0.3	0.5	0.6	0.7
$F(\alpha)$	10^3	0.119	0.206	0.264	0.288	0.286
$F_N(\alpha)$	10^3	0.118	0.205	0.265	0.290	0.313
$F_A(\alpha)$	10^3	—	—	—	—	—
α		0.8	0.85	0.9	0.95	1
$F(\alpha)$	10^3	0.274	0.243	0.231	0.210	0
$F_N(\alpha)$	10^3	0.336	—	—	—	—
$F_A(\alpha)$	10^3	—	0.221	0.218	0.207	0

2. Considérons le cas de la traction axiale par la force $P = q\pi R^2$ d'un cylindre de rayon unité présentant une coupure annulaire (cf. fig. 61). Cherchons une solution approchée du problème donné en supposant que la surface de la coupure est libre et que sur la surface latérale du cylindre les contraintes tangentielles et les déplacements radiaux sont nuls. Le problème est à symétrie axiale

et l'état de contrainte au voisinage de la coupure peut être obtenu de la considération d'un cylindre semi-infini $z \geqslant 0$, la base $z = 0$ duquel est soumise aux conditions :

$$\begin{gathered}\tau_{rz}(r, 0) = 0 \quad (0 \leqslant r < a), \quad u_z(r, 0) = 0 \quad (0 \leqslant r < a), \\ \sigma_z(r, 0) = -q \quad (a < r \leqslant 1).\end{gathered} \tag{9.36}$$

Dans ce cas les composantes des déplacements et des contraintes peuvent être exprimées par une fonction harmonique prise de (5.45), (5.46), ch. III, en posant $\psi = -(1-2\nu)^{-1}\varphi$, $\partial\psi/\partial z = -\psi_z$:

$$\begin{gathered}u_r = z\frac{\partial^2\psi}{\partial r\,\partial z} + (1-2\nu)\frac{\partial\psi}{\partial r}, \quad u_z = z\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} - 2(1-\nu)\frac{\partial\psi}{\partial z}, \\ \sigma_z = 2\mu\left(z\frac{\partial^3\psi}{\partial z^3} - \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right), \quad \tau_{zr} = 2\mu z\frac{\partial^3\psi}{\partial r\,\partial z^2}.\end{gathered} \tag{9.37}$$

Prenant en considération les conditions pour $z \to \infty$ et la symétrie axiale, nous choisissons la fonction harmonique sous la forme

$$\psi(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-2} A_n J_0(\lambda_n r)\, e^{-\lambda_n z}. \tag{9.38}$$

Ici λ_n sont les racines de l'équation $J_0'(\lambda_n) = 0$. Il en résulte qu'on doit avoir sur la surface latérale du cylindre

$$\tau_{rz}(1, z) = 0, \quad u_r(1, z) = 0. \tag{9.39}$$

Vérifiant les conditions (9.36) nous obtenons les équations duales en séries

$$\begin{gathered}\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-1} A_n J_0(\lambda_n r) = 0 \quad (0 \leqslant r < a), \\ \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\lambda_n r) = \frac{q}{2\mu} \quad (a < r \leqslant 1).\end{gathered} \tag{9.40}$$

Posons

$$-\frac{q}{2\mu} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\lambda_n r) = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\int_r^a \frac{t g(t)\,dt}{\sqrt{t^2 - r^2}} \quad (0 \leqslant r < a). \tag{9.41}$$

La seconde équation (9.40) et l'équation (9.41) impliquent

$$A_n = 2J_0^{-2}(\lambda_n)\int_0^a g(t) \cos(\lambda_n t)\,dt, \tag{9.42}$$

$$\int_0^a g(t)\,dt = -\frac{q}{4\mu}. \tag{9.43}$$

Portant l'expression (9.42) dans la première équation (9.40) et tenant compte des relations obtenues dans [147], nous trouvons

$$g(t) = \int_0^a g(u)\, K(u, t)\, du + \frac{4}{\pi} \int_0^a g(u)\, du, \tag{9.44}$$

$$K(u, t) = \frac{4}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{K_1(y)}{y I_1(y)} [2I_1(y) - y\, \mathrm{ch}(uy)\, \mathrm{ch}\,(ty)]\, dy. \tag{9.45}$$

La relation (9.44) est une équation intégrale de Fredholm de deuxième espèce pour $g(t)$. Pour résoudre cette équation utilisons la représentation du noyau (9.45) sous la forme d'une série de puissances

$$K(u, t) = \sum_{m=0}^\infty b_{2m}(u)\, t^{2m}. \tag{9.46}$$

Ici

$$\begin{gathered} b_0(u) = \frac{4}{\pi^2}\left[T^* - \sum_{s=1}^\infty T_{2s} \frac{u^{2s}}{(2s)!}\right], \\ b_{2m}(u) = -\frac{4}{\pi^2} \sum_{s=1}^\infty \frac{T_{2m+2,\, s-2}\, u^{2s-2}}{(2m)!\,(2s-2)!} \quad (m = 1, 2, \ldots), \end{gathered} \tag{9.47}$$

$$T^* = \sum_{s=1}^\infty \frac{T_{2s}}{2^{2s} s!\,(s+1)!},$$

$$T_n = \int_0^\infty \frac{K_1(y)}{I_1(y)}\, y^n\, dy$$

(les valeurs numériques de T_n sont données dans [143]).

Cherchant la solution de l'équation (9.44) sous la forme

$$g(t) = C(a) \sum_{m=0}^\infty Q_{2m}\, t^{2m}, \tag{9.48}$$

nous obtenons pour déterminer les coefficients Q_{2m} un système infini d'équations algébriques

$$Q_{2m} = \sum_{k=0}^\infty Q_{2k}\, C_{2k,\, 2m} + \delta_m^0 \quad (m = 0, 1, 2, \ldots). \tag{9.49}$$

Ici

$$C_{2k,0} = \frac{4}{\pi^2} T^* \frac{a^{2k+2}}{2k+1} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{T_{2s} a^{2k+2s+1}}{(2s)!\,(2s+2k+1)}$$

$$(k = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$C_{2k,\,2m} = -\frac{4}{\pi^2} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{T_{2m+2s-2} a^{2k+2s-1}}{(2m)!\,(2s-2)!\,(2k+2s-1)}.$$

$$(k = 0, 1, 2, \ldots;\ m = 1, 2, 3, \ldots).$$

Le système (9.49) est quasi régulier pour $0 \leqslant a < 1$. Ceci suit des expressions asymptotiques des fonctions $b_{2m}(u)$ pour de grands m :

$$|b_{2m}(u)| \sim \frac{2}{\pi(2-u)^{2m+1}}\left[1 + \frac{3}{4}\frac{2-u}{2m} + \frac{9}{32}\frac{(2-u)^2}{(2m-1)2m} + \ldots\right] +$$

$$+ \frac{2}{\pi(2+u)^{2m+1}}\left[1 + \frac{3}{4}\frac{2+u}{2m} + \frac{9}{32}\frac{(2+u)^2}{(2m-1)2m} + \ldots\right]$$

$$(0 \leqslant u < 1)$$

et des estimations

$$|C_{2k,\,2m}| \leqslant |b_{2m}(a_1)|\,\frac{a^{2k+1}}{2k+1} \quad (0 \leqslant a_1 < a < 1),$$

$$S_{2m+1} = \sum_{k=0}^{\infty} |C_{2k,\,2m}| \leqslant \frac{1}{2}\,|b_{2m}(a_1)|\,\ln\frac{1+a}{1-a}.$$

Ainsi, à partir d'un certain numéro $m = m'$, on a l'inégalité

$$S_{2m+1} < 1, \quad m > m'.$$

Indiquons ici une formule asymptotique permettant de déterminer les coefficients T_n pour de grands n :

$$T_n \sim \frac{\pi n!}{2^{n+1}}\left[1 + \frac{3}{4}\frac{2}{n} + \frac{9}{32}\frac{2^2}{(n-1)n} + \ldots\right].$$

Pour $n \geqslant 8$, les valeurs de T_n calculées d'après cette formule diffèrent de moins de 1,1 % de leurs valeurs exactes.

La constante $C(a)$ sera définie de façon à vérifier la condition (9.43). Nous avons

$$C(a) = -\frac{q}{\pi G}\left(\sum_{m=0}^{\infty} Q_{2m}\frac{a^{2m+1}}{2m+1}\right)^{-1}. \tag{9.50}$$

Les contraintes normales dans le plan $z = 0$ sur le prolongement de la coupure seront déterminées par la formule

$$\sigma_z(r, 0) = -2\mu \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\lambda_n r) =$$

$$= -q + \frac{2\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \int_r^a \frac{t g(t)\, dt}{\sqrt{t^2 - r^2}} \quad (r \leqslant a). \quad (9.51)$$

Portons (9.48) dans (9.51) et déterminons la singularité des contraintes au sommet de la coupure. Nous obtenons

$$\sigma_z(r, 0) = -\frac{2GC(a)}{\sqrt{a^2 - r^2}} \sum_{m=0}^{\infty} Q_{2m} r^{2m} + \ldots \quad (r < a). \quad (9.52)$$

Ici sont négligés les termes bornés pour $r \to a$.

La formule (9.52) permet de déterminer le coefficient d'intensité des contraintes K_I et la quantité Q_I, proportionnelle à la charge critique :

$$K_I = \sqrt{2\pi} \lim_{r \to a} [\sqrt{a - r}\, \sigma_z(r, 0)] = -2G \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, g(a) \quad (r < a),$$
$$Q_I = 2qR^{1/2}\pi^{-1/2}K_{IC}^{-1}. \quad (9.53)$$

Compte tenu de (9.50) pour la constante $C(a)$, écrivons l'expression du coefficient d'intensité des contraintes dans le cas d'un cylindre de rayon R :

$$K_I = \frac{q\sqrt{\pi R}}{2\alpha^{3/2}} \left(\sum_{m=0}^{\infty} Q_{2m}\, \alpha^{2m} \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} Q_{2m} \frac{\alpha^{2m}}{2m+1} \right)^{-1} \quad \left(\alpha = \frac{a}{R} \right). \quad (9.54)$$

Pour de petites valeurs de α nous avons $Q_0 \sim 1$, $Q_{2m} \sim 0$ $(m = 1, 2, \ldots)$ et de la relation (9.54) nous déduisons

$$K_I \sim \frac{1}{2} q \sqrt{\pi R}\, \alpha^{-3/2}.$$

Ce résultat découle de la solution de Neuber [97] relative au problème d'extension d'un espace comportant une fente extérieure.

Sur la figure 64 est montrée la quantité Q_I en fonction de la distance au sommet de la coupure $\alpha = a/R$.

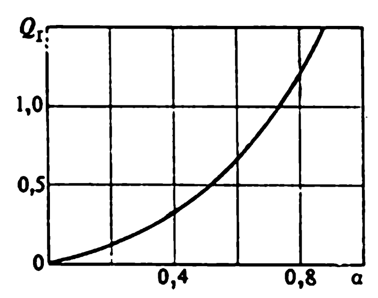


Fig. 64. Quantité Q_I en fonction de $\alpha = a/R$.

§ 10. Problème de l'électroélasticité pour un cylindre à revêtement électroconducteur

Considérons le problème statique de l'électroélasticité concernant un cylindre de rayon a (fig. 65) avec un revêtement conducteur sur sa partie $r = a$, $-\theta_0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0$ [102]. Le cylindre est fait dans un matériau transversalement isotrope du type d'un cristal du système hexagonal ou d'une céramique piézo-électrique polarisée suivant l'axe du cylindre.

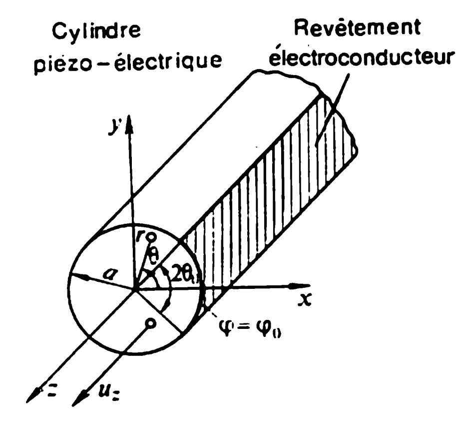


Fig. 65. Cylindre à revêtement électroconducteur.

L'étude des équations générales du milieu piézo-électrique montre que pour les cristaux de classe $6mm$ existent des ondes électro-élastiques liées de cisaillement. Pour ces ondes, dans le vecteur déplacement mécanique, seule est non nulle la composante u_z parallèle à l'axe du cylindre, $u_z = u_z(r, \theta)$. Les composantes non nulles du vecteur intensité du champ électrique sont $E_r(r, \theta)$, $E_\theta(r, \theta)$.

Supposant toutes les composantes du champ électro-élastique indépendantes de la coordonnée z et du temps t, écrivons le système fondamental d'équations, constitué des équations d'équilibre, d'électrostatique et des équations d'état (5.17), ch. II :

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{1}{r}\tau_{rz} = 0, \tag{10.1}$$

$$\frac{\partial D_r}{\partial r} + \frac{1}{r} D_r + \frac{\partial D_\theta}{r\,\partial\theta} = 0, \quad \frac{\partial (rE_\theta)}{\partial r} = \frac{\partial E_r}{\partial \theta_r}, \tag{10.2}$$

$$\begin{aligned} \tau_{\theta z} &= c_{44}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial\theta}\right) - e_{15}E_\theta, \\ \tau_{rz} &= c_{44}\frac{\partial u_z}{\partial r} - e_{15}E_r, \end{aligned} \tag{10.3}$$

$$D_r = e_{15}\frac{\partial u_z}{\partial r} + \varepsilon_{11}^s E_r, \quad D_\theta = e_{15}\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial\theta} + \varepsilon_{11}^s E_\theta.$$

Introduisons le potentiel électrique

$$E_r = -\frac{\partial\varphi}{\partial r}; \quad E_\theta = -\frac{\partial\varphi}{r\partial\theta}. \tag{10.4}$$

Des équations (10.1) et (10.2), compte tenu de (10.3), il résulte

$$\begin{gathered} c_{44}\nabla^2 u_z + e_{15}\nabla^2\varphi = 0, \quad e_{15}\nabla^2 u_z - \varepsilon_{11}^{\varepsilon}\nabla^2\varphi = 0, \\ \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}. \end{gathered} \tag{10.5}$$

Donc pour résoudre le problème posé il nous faut connaitre dans le domaine $0 \leqslant r < a$ deux fonctions harmoniques u_z et φ pour des conditions appropriées sur la frontière $r = a$.

Supposons que la déformation du cylindre piézo-électrique est due à l'action d'un potentiel électrique s'exerçant sur l'électrode occupant la partie $r = a$, $-\theta_0 < \theta < \theta_0$ du cylindre (cf. fig. 65) et que la partie restante de sa surface fait frontière avec le vacuum. Si les charges mécaniques ne s'exercent pas sur la surface $r = a$ et si l'électrode est considérée comme une couche conductrice infiniment mince, alors, compte tenu de la symétrie par rapport à l'axe x, les conditions aux limites pour les fonctions u_z et φ s'écriront

$$\tau_{rz}|_{r=a} = \left(c_{44}\frac{\partial u_z}{\partial r} + e_{15}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)\Bigg|_{r=a} = 0 \quad (0 \leqslant \theta < \pi), \tag{10.6}$$

$$\varphi(a, \theta) = \varphi^*(a, \theta) \quad (\theta_0 \leqslant \theta < \pi), \tag{10.7}$$

$$\varphi(a, \theta) = \varphi_0 \qquad (0 \leqslant \theta < \theta_0), \tag{10.8}$$

$$D_r(a, \theta) = D_r^*(a, \theta) \quad (\theta_0 < \theta < \pi). \tag{10.9}$$

Ici $\varphi^*(r, \theta)$ est le potentiel électrique du vacuum, $D_r^*(r, \varphi) = -\varepsilon_0\frac{\partial\varphi^*}{\partial r}$ la composante radiale du vecteur induction électrique dans le vacuum, ε_0 la constante électrique $\left(\varepsilon_0 = \frac{10^{-9}}{36\pi}\frac{\Phi}{M}\right)$. Des conditions (10.6) et (10.9) nous obtenons

$$\begin{gathered} (1 + k^2)\frac{\partial\varphi}{\partial r}\Bigg|_{r=a} = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_{11}^{\varepsilon}}\frac{\partial\varphi^*}{\partial r}\Bigg|_{r=a} \quad (\theta_0 < \theta < \pi), \\ k^2 = \frac{e_{15}^2}{c_{44}\varepsilon_{11}^{\varepsilon}}. \end{gathered} \tag{10.10}$$

Ainsi, dans le cas donné le problème lié d'électroélasticité se décompose en deux, c'est-à-dire qu'on peut tout d'abord déterminer les potentiels électriques φ et φ^* à partir des conditions mixtes (10.7), (10.8), (10.10) et ensuite trouver la fonction harmonique u_z en utilisant la condition (10.6).

Représentons les fonctions harmoniques u_z, φ, φ^* comme développements en série

$$u_z(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(\frac{r}{a}\right)^n \cos n\theta \quad (0 \leqslant r < a), \tag{10.11}$$

$$\varphi(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \left(\frac{r}{a}\right)^n \cos n\theta \quad (0 \leqslant r < a), \tag{10.12}$$

$$\varphi^*(r, \theta) = D_0 \ln\left(\frac{r}{a}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \left(\frac{a}{r}\right)^n \cos n\theta \quad (a < r < \infty). \tag{10.13}$$

Notons que le premier terme du développement (10.13) tient compte du caractère illimité du potentiel électrostatique du problème plan à l'infini [155].

Portant les développements (10.12), (10.13) dans les conditions (10.7), (10.8), (10.10), nous obtenons les égalités

$$C_n = B_n \tag{10.14}$$

et les équations duales en séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos n\theta = \varphi_0 \quad (0 \leqslant \theta < \theta_0), \tag{10.15}$$

$$D_0^* + \sum_{n=1}^{\infty} nB_n \cos n\theta = 0 \quad (\theta_0 < \theta < \pi),$$

$$D_0^* = \frac{D_0 \varepsilon_0/\varepsilon_{11}^{\varepsilon}}{(1 + k^2 + \varepsilon_0/\varepsilon_{11}^{\varepsilon})} \tag{10.16}$$

pour déterminer les constantes B_n. Supposant

$$D_0^* + \sum_{n=1}^{\infty} nB_n \cos n\theta = f(\theta) \quad (0 \leqslant \theta < \theta_0) \tag{10.17}$$

des égalités (10.16) et (10.17) nous obtenons

$$D_0^* = \frac{1}{\pi}\int_0^{\theta_0} f(\xi)\,d\xi, \quad nB_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\theta_0} f(\xi)\cos n\xi\,d\xi. \qquad (10.18)$$

Portant (10.18) dans (10.15), puis intervertissant l'ordre d'intégration et de sommation nous obtenons une équation intégrale pour la fonction $f(\theta)$:

$$\int_0^{\theta_0} f(\xi)\left(\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\theta\cos n\xi}{n}\right)d\xi = \varphi_0 \quad (0 \leqslant \theta < \theta_0).$$

L'intégrale est de noyau sommable

$$\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\theta\cos n\xi}{n} = -\frac{1}{\pi}\ln|2(\cos\theta - \cos\xi)|. \qquad (10.19)$$

de sorte que

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^{\theta_0} f(\xi)\ln|2(\cos\theta - \cos\xi)|\,d\xi = \varphi_0 \quad (0 \leqslant \theta < \theta_0). \qquad (10.20)$$

Pour résoudre l'équation (10.20) introduisons de nouvelles variables ξ_1, θ_1 :

$$\cos\theta = \alpha + \beta\cos\theta_1, \quad \cos\xi = \alpha + \beta\cos\xi_1. \qquad (10.21)$$

Ici $\alpha = \cos^2(\theta_0/2)$, $\beta = \sin^2(\theta_0/2)$ et lorsque les variables θ, ξ varient entre 0 et θ_0, les variables θ_1, ξ_1 varient entre 0 et π. Compte tenu de (10.21) l'équation (10.20) prend la forme

$$-\frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi}\bar{f}(\xi_1)\frac{d\xi}{d\xi_1}d\xi_1\right)\ln 2\beta -$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\bar{f}(\xi_1)\frac{d\xi}{d\xi_1}\ln|2(\cos\theta_1 - \cos\xi_1)|\,d\xi_1 = \varphi_0 \qquad (10.22)$$

$$(0 \leqslant \theta_1 < \pi),$$

$$\bar{f}(\xi_1) = f[\arccos(\alpha + \beta\cos\xi_1)].$$

Représentant la fonction $\bar{f}(\xi_1)\frac{d\xi}{d\xi_1}$ sous forme de série

$$\bar{f}(\xi_1)\,\frac{d\xi}{d\xi_1}=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\,\xi_1$$

et utilisant le développement (10.19), de l'égalité (10.22) nous trouvons

$$-a_0\ln 2\beta=\varphi_0,\quad a_n=0\quad (n=1,2,\ldots). \qquad (10.23)$$

La solution de l'équation intégrale (10.20) est donc

$$f(\xi)=a_0\,\frac{d\xi_1}{d\xi}=-\frac{\varphi_0}{\ln 2\beta}\,\frac{\sqrt{2}\cos\frac{\xi}{2}}{\sqrt{\cos\xi-\cos\theta_0}}. \qquad (10.24)$$

Portant (10.24) dans (10.18), nous obtenons

$$nB_n=-\frac{\varphi_0}{\pi\ln 2\beta}\,\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{\theta_0}\frac{\cos\frac{\xi}{2}\cos n\xi\,d\xi}{\sqrt{\cos\xi-\cos\theta_0}}=$$

$$=-\frac{\varphi_0}{\pi\ln 2\beta}\,[P_{n-1}(\cos\theta_0)+P_n(\cos\theta_0)]. \qquad (10.25)$$

Ici $P_n(z)$ est un polynôme de Legendre.

Les potentiels électriques du cylindre piézo-électrique et du vacuum se détermineront donc par les formules

$$\varphi(r,\theta)=-\frac{\varphi_0}{\pi\ln 2\beta}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n\frac{P_{n-1}(\cos\theta_0)+P_n(\cos\theta_0)}{n}\cos n\theta, \qquad (10.26)$$

$$\varphi^*(r,\theta)=-\frac{(1+k^2+\varepsilon_0/\varepsilon_{11}^{s})}{\varepsilon_0/\varepsilon_{11}^{s}}\,\frac{\varphi_0}{\pi\ln 2\beta}\ln\left(\frac{r}{a}\right)-$$

$$-\frac{\varphi_0}{\pi\ln 2\beta}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^n\frac{P_{n-1}(\cos\theta_0)+P_n(\cos\theta_0)}{n}\cos n\theta. \qquad (10.27)$$

Utilisant la condition (10.6) nous trouvons de (10.26) la composante u_z du vecteur déplacement mécanique :

$$\left.\frac{\partial u_z}{\partial r}\right|_{r=a} = -\frac{e_{15}}{c_{44}}\left.\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right|_{r=a} =$$

$$= \frac{e_{15}\varphi_0}{c_{44}\pi \ln 2\beta}\frac{1}{a}\sum_{n=1}^{\infty}[P_{n-1}(\cos\theta_0)+P_n(\cos\theta_0)],$$

d'où à l'aide de (10.11) nous obtenons

$$A_n = \frac{e_{15}\varphi_0}{c_{44}\pi \ln 2\beta}\frac{[P_{n-1}(\cos\theta_0)+P_n(\cos\theta_0)]}{n}, \tag{10.28}$$

$$u_z(r,\theta) = \frac{e_{15}\varphi_0}{c_{44}\pi \ln 2\beta}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n \frac{[P_{n-1}(\cos\theta_0)+P_n(\cos\theta_0)]}{n}\cos n\theta. \tag{10.29}$$

Les formules (10.26), (10.27), (10.29) permettent de déterminer toutes les composantes du champ électroélastique du système considéré. Notons un fait intéressant, consistant en ce que, vu l'égalité

$$u_z = -\frac{e_{15}}{c_{44}}\varphi,$$

les composantes des contraintes $\sigma_{\theta z}$, σ_{rz} sont nulles partout dans le cylindre, tandis que les composantes du vecteur déplacement électrique sont

$$D_r = -\varepsilon_{11}^{\varepsilon}(1+k^2)\frac{\partial \varphi}{\partial r} =$$

$$= \frac{\varepsilon_{11}^{\varepsilon}\varphi_0(1+k^2)}{a\pi \ln 2\beta}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^{n-1}[P_{n-1}(\cos\theta_0)+P_n(\cos\theta_0)]\cos n\theta, \tag{10.30}$$

$$D_\theta = -\varepsilon_{11}^{\varepsilon}(1+k^2)\frac{\partial \varphi}{r\,\partial \theta} =$$

$$= -\frac{\varepsilon_{11}^{\varepsilon}\varphi_0(1+k^2)}{a\pi \ln 2\beta}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^{n-1}[P_{n-1}(\cos\theta_0)+P_n(\cos\theta_0)]\sin n\theta.$$

Les développements [9]

$$\sum_{n=1}^{\infty}[P_{n-1}(\cos\theta_0)+P_n(\cos\theta_0)]\cos n\theta =$$

$$= -1+\begin{cases}\sqrt{2}\cos\dfrac{\theta}{2}(\cos\theta-\cos\theta_0)^{-1/2} & (\theta<\theta_0),\\ 0 & (\theta>\theta_0);\end{cases}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}[P_{n-1}(\cos\theta_0)+P_n(\cos\theta_0)]\sin n\theta =$$

$$=\begin{cases}\sqrt{2}\cos\dfrac{\theta}{2}(\cos\theta_0-\cos\theta)^{-1/2} & (\theta>\theta_0),\\ 0 & (\theta<\theta_0)\end{cases}$$

permettent d'obtenir les composantes D_r, D_θ sur la surface du cylindre :

$$D_r(a,\theta)=\frac{\varepsilon_{11}^{\prime}\varphi_0(1+k^2)}{a\pi\ln 2\beta}\left[-1+\sqrt{2}\cos\frac{\theta}{2}(\cos\theta-\cos\theta_0)^{-1/2}\right]\quad(\theta<\theta_0),$$

$$D_\theta(a,\theta)=0;\tag{10.31}$$

$$D_r(a,\theta)=-\frac{\varepsilon_{11}^{\prime}\varphi_0(1+k^2)}{a\pi\ln 2\beta}\quad(\theta>\theta_0),$$

$$D_\theta(a,\theta)=-\frac{\varepsilon_{11}^{\prime}\varphi_0(1+k^2)}{a\pi\ln 2\beta}\sqrt{2}\cos\frac{\theta}{2}(\cos\theta_0-\cos\theta)^{-1/2}.$$

Utilisant (10.27), déterminons les expressions de la densité des charges électriques sur l'électrode

$$q(\theta)=D_r^*(a,\theta)-D_r(a,\theta)=-\varepsilon_0\left.\frac{\partial\varphi^*}{\partial r}\right|_{r=a}-D_r(a,\theta)=$$

$$=\frac{\varphi_0\varepsilon_{11}^{\prime}\left(1+k^2+\dfrac{\varepsilon_0}{\varepsilon_{11}^{\prime}}\right)}{a\pi\ln 2\beta}\left[2-\sqrt{2}\cos\frac{\theta}{2}(\cos\theta-\cos\theta_0)^{-1/2}\right]\tag{10.32}$$

$$(0\leqslant\theta<\theta_0).$$

Sur la figure 66 est montrée la relation

$$q^*(\theta)=\frac{q(\theta)\,a\pi\ln 2\beta}{\varphi_0\varepsilon_{11}^{\prime}(1+k^2+\varepsilon_0/\varepsilon_{11}^{\prime})}$$

pour $\theta_0=\pi/4$, $0\leqslant\theta<\theta_0$.

Pour calculer la somme entrant dans (10.29) nous nous servons de la représentation intégrale suivante :

$$y(\cos\theta_0) = P_{n-1}(\cos\theta_0) + P_n(\cos\theta_0) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{\theta_0} \frac{\cos n\varphi \cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\theta_0}}. \quad (10.33)$$

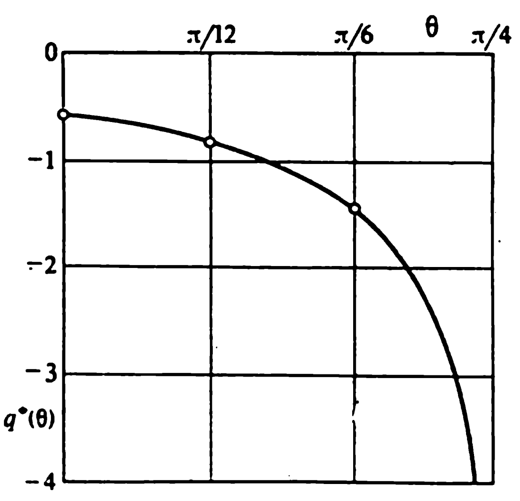


Fig. 66. Densité des charges électriques q^* en fonction de l'angle θ.

Intervertissant l'ordre de sommation et d'intégration dans (10.29) nous obtenons

$u_z(r, \theta) =$

$$= \frac{c_{15}\varphi_0}{c_{44}\pi \ln 2\beta}\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{\theta_0} \frac{\cos\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\theta_0}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{n}\right)^n \frac{\cos n\varphi \cos n\theta}{n}\right)d\varphi =$$

$$= \frac{c_{15}\varphi_0 \sqrt{2}}{c_{44}\pi^2 \ln 2\beta}\int_0^{\theta_0} \frac{\cos\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\theta_0}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n \frac{\cos n(\varphi + \theta)}{n} + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n \frac{\cos n(\varphi - \theta)}{n}\right)d\varphi.$$

Les séries figurant dans la dernière expression se laissent sommer, puisque

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\rho^n \cos n\beta}{n} = -\frac{1}{2}\ln(1 + \rho^2 - 2\rho\cos\beta).$$

Par conséquent,

$$u_z(\rho,\ \theta) = -\frac{c_{15}\varphi_0\sqrt{2}}{2c_{44}\pi^2 \ln 2\beta}\int_0^{\theta_0} \frac{\cos\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\theta_0}} \ln[(1+\rho^2-2\rho\cos(\varphi+\theta))\times$$
$$\times(1+\rho^2-2\rho\cos(\varphi-\theta))]\,d\varphi. \quad (10.34)$$

Faisant dans l'intégrale (10.34) le changement de variable

$$\gamma = \operatorname{arc\,sin}\left(\sin\frac{\varphi}{2}\Big/\sin\frac{\theta_0}{2}\right),$$

nous obtenons la représentation du déplacement u_z sous la forme :

$$u_z(\rho,\ \theta) =$$
$$= -\frac{c_{15}\varphi_0}{c_{44}\pi^2\ln 2\beta}\int_0^{\pi/2} \ln\left\{\left[1+\rho^2-2\rho\cos\theta\left(1-2\sin^2\frac{\theta_0}{2}\sin^2\gamma\right)\right]^2 - \right.$$
$$\left. -16\rho^2\sin^2\theta\sin^2\frac{\theta_0}{2}\sin^2\gamma\left(1-\sin^2\frac{\theta_0}{2}\sin^2\gamma\right)\right\}d\gamma. \quad (10.35)$$

Les figures 67 et 68 montrent le déplacement

$$u_z^* = -\frac{u_z(\rho,\theta)\,c_{44}\pi^2\ln 2\beta}{c_{15}\varphi_0}$$

Fig. 67. Déplacement u_z^* en fonction de ρ et θ pour $\theta_0 = \pi/8$.

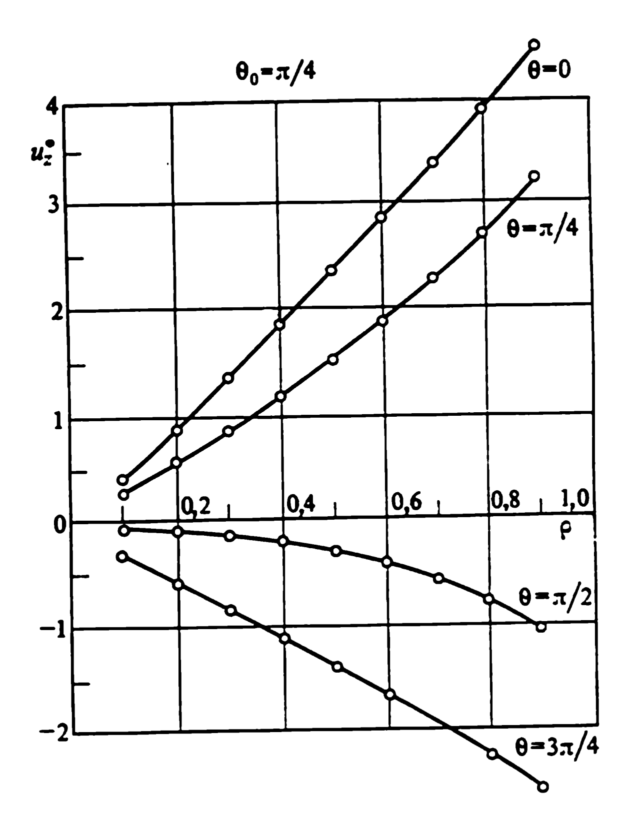


Fig. 68. Déplacement u_z^* en fonction de ρ et θ pour $\theta_0 = \pi/4$.

en fonction de $\rho = \dfrac{r}{a}$ et θ pour deux valeurs de l'angle θ_0 du revêtement d'électrode : $\theta_0 = \pi/8$, $\theta_0 = \pi/4$.

§ 11. Ondes de torsion dans un espace comportant une fissure en présence d'un champ magnétique axial

Considérons dans un milieu isotrope homogène infini, soumis à l'action d'un champ magnétique axial homogène $\boldsymbol{H}_0(0, 0, H_0)$ [137], une coupure circulaire de rayon a dans le plan. Le milieu a une perméabilité magnétique de vacuum $\varkappa_0 = 4\pi \times 10^{-7} \mathrm{H \cdot m^{-1}}$. Introduisons un repère cylindrique, dirigeant l'axe z parallèlement à l'axe de symétrie du matériau. Envisageons de petites perturbations qui se caractérisent par le vecteur déplacement

$\boldsymbol{u}[0, u_\theta(r, z, t), 0]$ et que nous supposons indépendantes de l'angle θ. Dans ce cas seules les composantes $\tau_{r\theta}$ et $\tau_{\theta z}$ du tenseur des contraintes sont non nulles :

$$\tau_{r\theta} = \mu\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r}u_\theta\right), \quad \tau_{\theta z} = \mu\frac{\partial u_\theta}{\partial z}. \tag{11.1}$$

Procédons maintenant à une linéarisation des équations fondamentales décrivant le mouvement en présence de champs élastique, électrique et magnétique (cf. § 5, ch.II). Ce système linéarisé d'équations est de la forme [150]

$$e_r + \varkappa_0 H_0 \frac{\partial u_\theta}{\partial t} = 0, \tag{11.2}$$

$$\frac{\partial e_r}{\partial z} + \varkappa_0 \frac{\partial h_\theta}{\partial t} = 0, \tag{11.3}$$

$$\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r^2}u_\theta + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} + \frac{\varkappa_0 H_0}{\mu}\frac{\partial h_\theta}{\partial z} = \frac{1}{c_T^2}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2}. \tag{11.4}$$

Ici $\boldsymbol{e}(e_r, 0, 0)$, $\boldsymbol{h}(0, h_\theta, 0)$ sont les perturbations apparaissant dans les champs électrique et magnétique, et c_T la vitesse des ondes transversales. Les composantes du déplacement, des contraintes et des perturbations des champs magnétique et électrique peuvent être représentées de la façon suivante :

$$u_\theta = u_\theta^{(i)} + u_\theta^{(s)}, \quad \tau_{\theta z} = \tau_{\theta z}^{(i)} + \tau_{\theta z}^{(s)}, \quad \tau_{r\theta} = \tau_{r\theta}^{(i)} + \tau_{r\theta}^{(s)},$$
$$e_r = e_r^{(i)} + e_r^{(s)}, \quad h_\theta = h_\theta^{(i)} + h_\theta^{(s)}. \tag{11.5}$$

L'indice « i » se rapporte aux ondes incidentes, l'indice « s » aux ondes réfléchies.

Supposons que les composantes de l'onde incidente se présentent sous la forme :

$$h_\theta^{(i)} = \frac{ipH_0}{V_h c_T a}u_\theta^0 r \exp\left[-ip\left(t + \frac{z}{V_h c_T}\right)\right],$$
$$e_r^{(i)} = \frac{ip\varkappa_0 H_0}{a}u_\theta^0 r \exp\left[-ip\left(t + \frac{z}{V_h c_T}\right)\right], \tag{11.6}$$
$$u_\theta^{(i)} = \frac{u_\theta^0}{a} r \exp\left[-ip\left(t + \frac{z}{V_h c_T}\right)\right]$$

$$(V_h = \sqrt{1 + h_c^2}, \; h_c = \varkappa_0 H_0^2/\mu).$$

Ici u_θ^0 est la valeur d'amplitude de l'onde de torsion élastique incidente, p la fréquence circulaire.

Les contraintes dans l'onde incidente sont

$$\tau_{\theta z}^{(i)} = \mu \frac{\partial u_\theta^{(i)}}{\partial z} = P_h \frac{r}{a} e^{-ip\left(t + \frac{z}{V_h c_T}\right)}, \tag{11.7}$$

$$P_h = -\frac{ip\mu}{V_h c_T}.$$

Pour résoudre le problème, utilisons la transformation intégrale de Hankel et représentons la solution des équations (11.2), (11.3), (11.4) pour l'onde réfléchie ($z > 0$) sous la forme

$$u_\theta^{(s)}(r, z) = \int_0^\infty \alpha A(\alpha) e^{-\gamma(\alpha)z} J_1(\alpha r)\, d\alpha, \tag{11.8}$$

$$h_\theta^{(s)}(r, z) = -H_0 \int_0^\infty \alpha\gamma(\alpha) A(\alpha) e^{-\gamma(\alpha)z} J_1(\alpha r)\, d\alpha, \tag{11.9}$$

$$e_r^{(s)}(r, z) = ip\varkappa_0 H_0 \int_0^\infty \alpha A(\alpha) e^{-\gamma(\alpha)z} J_1(\alpha r) d\alpha. \tag{11.10}$$

Ici

$$\gamma(\alpha) = \frac{1}{V_h}\left[\alpha^2 - \left(\frac{p}{c_T}\right)^2\right]^{1/2}, \quad \operatorname{Re}\gamma(\alpha) > 0, \quad \operatorname{Im}\gamma(\alpha) < 0.$$

Compte tenu de (11.8) nous tirons de (11.1) les contraintes correspondant à l'onde réfléchie :

$$\frac{1}{\mu}\tau_{r\theta}^{(s)} =$$

$$= \int_0^\infty \alpha^2 A(\alpha) e^{-\gamma(\alpha)z} J_0(\alpha r) d\alpha - \frac{2}{r}\int_0^\infty \alpha A(\alpha) e^{-\gamma(\alpha)z} J_1(\alpha r)\, d\alpha, \tag{11.11}$$

$$\frac{1}{\mu}\tau_{\theta z}^{(s)} = -\int_0^\infty \alpha\gamma(\alpha) A(\alpha) e^{-\gamma(\alpha)z} J_1(\alpha r) d\alpha. \tag{11.12}$$

Les conditions aux limites dans le plan $z = 0$ sont de la forme

$$\tau_{\theta z}(r, 0) = 0 \quad (r < a), \quad u_\theta^{(s)}(r, 0) = 0 \quad (r > a). \tag{11.13}$$

Compte tenu de (11.12) et (11.8), les conditions aux limites (11.13) se ramènent à des équations intégrales duales permettant de déterminer $A(\alpha)$:

$$\int_0^\infty \alpha^2 A(\alpha) J_1(\alpha r) d\alpha = \int_0^\infty \alpha g(\alpha) A(\alpha) J_1(\alpha r) d\alpha + \frac{V_h P_h}{\mu} \frac{r}{a} \quad (11.14)$$

$$(r < a),$$

$$\int_0^\infty \alpha A(\alpha) J_1(\alpha r) d\alpha = 0 \quad (r \geqslant a). \quad (11.15)$$

Multipliant l'équation (11.14) par r^2 et intégrant par rapport à r entre 0 et r, nous obtenons

$$\int_0^\infty \alpha A(\alpha) J_2(\alpha r) d\alpha = \int_0^\infty g(\alpha) A(\alpha) J_2(\alpha r) d\alpha + \frac{V_h P_h}{\mu} \frac{r^2}{4a} \quad (11.16)$$

$$(r < a).$$

Nous chercherons la solution de (11.15), (11.16) sous la forme

$$\alpha A(\alpha) = \sqrt{\alpha} \int_0^a \varphi_h(\xi) J_{3/2}(\alpha \xi) d\xi, \quad (11.17)$$

où $\varphi_h(\xi)$ est une fonction inconnue devant être déterminée. Portant (11.17) dans (11.15) et changeant l'ordre d'intégration, nous obtenons

$$\int_0^\infty \alpha A(\alpha) J_1(\alpha r) d\alpha = \int_0^a \varphi_h(\xi) \left(\int_0^\infty \sqrt{\alpha} J_1(\alpha r) J_{3/2}(\alpha \xi) d\alpha \right) d\xi. \quad (11.18)$$

L'intégrale intérieure de (11.18) peut être calculée :

$$\int_0^\infty \sqrt{\alpha} J_1(\alpha r) J_{3/2}(\alpha \xi) d\alpha = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}\, r}{\sqrt{\pi}\, \xi^{3/2}} (\xi^2 - r^2)^{-1/2} & (r < \xi), \\ 0 & (r > \xi). \end{cases}$$

Dans ce cas l'égalité (11.15) sera identiquement vérifiée pour $r > a$.

Portant (11.17) dans l'équation (11.16) et tenant compte de la valeur de l'intégrale

$$\int_0^\infty \sqrt{\alpha}\, J_2(\alpha r)\, J_{3/2}(\alpha\xi)\, d\alpha = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{\xi^{3/2}}{r^2} (r^2 - \xi^2)^{-1/2} & (\xi < r), \\ 0 & (\xi > r), \end{cases}$$

on peut représenter l'équation (11.16) sous la forme

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^r \frac{\varphi_h(\xi)\xi^{3/2}\, d\xi}{\sqrt{r^2 - \xi^2}} = r^2 \int_0^a \varphi_h(\eta) \left[\int_0^\infty \alpha^{-1/2} g(\alpha) J_2(\alpha r) J_{3/2}(\alpha\eta)\, d\alpha \right] d\eta +$$

$$+ \frac{V_h P_h}{\mu} \frac{r^4}{4a} \quad (r < a). \qquad (11.19)$$

Supposant connu le second membre de (11.19), résolvons cette équation par rapport à $\varphi_h(\xi)$. Ceci nous donne une équation intégrale de Fredholm de deuxième espèce

$$\varphi_h(\xi) = \int_0^a \varphi_h(\eta) \left(\int_0^\infty g(\alpha)\, \xi J_{3/2}(\alpha\xi) J_{3/2}(\alpha\eta)\, d\alpha \right) d\eta + \frac{2\sqrt{2}\, V_h P_h \xi^{5/2}}{\sqrt{\pi}\, 3\mu a} .$$

Introduisant les grandeurs adimensionnelles

$$s = \frac{\xi}{a}, \quad t = \frac{\eta}{a},$$

$$\Phi_h(s) = \frac{3\sqrt{\pi}\mu}{2\sqrt{2}\; a\sqrt{a}\; P_h\sqrt{s}}\, \varphi_h(as), \qquad (11.20)$$

l'équation de Fredholm prend la forme

$$\Phi_h(s) = \int_0^1 \Phi_h(t)\, K_h(s, t)\, dt + s^2. \qquad (11.21)$$

Ici

$$K_h(s, t) = -a^2 \sqrt{st} \int_0^\infty \left(\alpha - \sqrt{\alpha^2 - (p/c_T)^2}\right) J_{3/2}(\alpha a s) J_{3/2}(\alpha a t)\, d\alpha. \quad (11.22)$$

Le problème se ramène donc à la résolution de l'équation intégrale (11.21) et à la recherche de la fonction $\varphi_h(\xi)$ à l'aide de

laquelle seront déterminées toutes les composantes des champs élastique et électromagnétique de l'onde réfléchie.

Remarquons que le noyau (11.22) de l'équation intégrale (11.21) peut être transformé par application de la technique des intégrales de contour et représenté sous la forme d'une intégrale à bornes finies :

$$K_h(s, t) = -iP_h^2\sqrt{st}\int_0^1 \sqrt{1-\xi^2}\,J_{3/2}(P_h s\xi)H_{3/2}^{(1)}(P_h t\xi)\,d\xi \quad (s < t). \quad (11.23)$$

Ici $H_{3/2}^{(1)}(z)$ est une fonction de Hankel. L'expression du noyau pour $s > t$ s'obtient de (11.23) en changeant de place s et t.

Cherchons les expressions asymptotiques des contraintes au voisinage du contour de la fissure $r = a$, $z = 0$. Il est clair que les contraintes globales sont constituées des contraintes dynamiques élastiques $\tau_{r\theta}$, $\tau_{\theta z}$ et des contraintes dynamiques de Maxwell $\tau_{mr\theta}$, $\tau_{m\theta z}$. Il apparaît d'autre part de (11.6) et (11.7) que les contraintes correspondant à l'onde incidente n'ont pas de singularités pour $r \to a$, $z \to 0$.

Cherchons l'expression asymptotique de $\tau_{\theta z}^{(s)}$ pour $r \to a$, $z \to 0$. Intégrant par parties, écrivons l'expression (11.17) sous la forme

$$\alpha A(\alpha) = -\alpha^{-1/2}\varphi_h(a)J_{1/2}(\alpha a) + \alpha^{-1/2}\int_0^a \xi^{-1/2}(\varphi_h(\xi)\,\xi^{1/2})'\,J_{1/2}(\alpha\xi)\,d\xi. \quad (11.24)$$

Portant (11.24) dans (11.12) nous obtenons

$$\frac{1}{\mu}\tau_{\theta z}^{(s)} = \varphi_h(a)\int_0^\infty \gamma(\alpha)\alpha^{-1/2}e^{-\gamma(\alpha)z}J_{1/2}(\alpha a)J_1(\alpha r)\,d\alpha -$$

$$-\int_0 \xi^{-1/2}(\varphi_h(\xi)\,\xi^{1/2})'\left[\int_0^\infty \gamma(\alpha)\alpha^{-1/2}e^{-\gamma(\alpha)z}J_{1/2}(\alpha\xi)J_1(\alpha r)\,d\alpha\right]d\xi. \quad (11.25)$$

On peut montrer [139] que la partie singulière des contraintes $\tau_{\theta z}^{(s)}$ se détermine par le premier terme de (11.25). Notons que pour calculer l'intégrale qui y figure on peut utiliser l'égalité approchée

$$\gamma(\alpha) \sim \frac{\alpha}{V_h} \quad \text{lorsque } \alpha \to \infty. \quad (11.26)$$

Par suite

$$\frac{1}{\mu}\tau_{\theta z}^{(s)} \sim \frac{\varphi_h(a)}{V_h}\sqrt{\frac{2}{\pi a}}\int_0^\infty e^{-\frac{z\alpha}{V_h}} J_1(\alpha r)\sin\alpha a\, d\alpha. \qquad (11.27)$$

La valeur de l'intégrale figurant dans (11.27) se détermine à l'aide de l'égalité connue [11]

$$\int_0^\infty e^{-\alpha z} J_1(\alpha r)\, d\alpha = \frac{1}{r} - \frac{z}{r\sqrt{z^2+r^2}} \qquad (\operatorname{Re}\alpha > 0).$$

Nous obtenons alors pour la partie singulière des contraintes

$$\tau_{\theta z}^{(s)} \sim \frac{\mu\varphi_h(a)}{V_h\, a\sqrt{\pi r_1}} H_c\left(\frac{1}{V_h},\ \theta\right), \qquad (11.28)$$

où

$$r_1\cos\theta = r - a, \quad z\sin\theta = r_1,$$

$$H_c\left(\frac{1}{V_h},\ \theta\right) = \left(\frac{\sqrt{\cos^2\theta + (1/V_h^2)\sin^2\theta} + \cos\theta}{2\left(\cos^2\theta + \frac{1}{V_h^2}\sin^2\theta\right)}\right)^{1/2}.$$

A l'aide de (11.28) nous trouvons le coefficient d'intensité des contraintes

$$K_{h\,\mathrm{III}} = \lim_{r\to a}\sqrt{2(r-a)}\,\tau_{\theta z}^{(s)} = \frac{4}{3\pi} V_h^2 P_h\sqrt{a}\,\Phi_h(1). \qquad (11.29)$$

Alors

$$\tau_{\theta z}^{(s)} \sim \frac{K_{h\,\mathrm{III}}}{V_h^2\sqrt{2r_1}} H_c\left(\frac{1}{V_h},\ \theta\right). \qquad (11.30)$$

D'une manière analogue sont déterminées les expressions asymptotiques de $\tau_{r\theta}^{(s)}$, $\tau_{mr\theta}^{(s)}$, $\tau_{m\theta z}^{(s)}$.

Remarquons que pour $h_c \to 0$ la solution obtenue coïncide avec la solution connue pour le cas purement élastique [85].

CHAPITRE VII

MÉTHODES DU POTENTIEL EN THÉORIE DE L'ÉLASTICITÉ

§ 1. Potentiels élastiques généralisés

Appliquons en un certain point $q(y_1, y_2, y_3)$ de l'espace une force concentrée $\boldsymbol{\varphi}(\varphi_1(q), \varphi_2(q), \varphi_3(q))$. A l'aide des formules (5.27), ch. III, ainsi que des formules obtenues de celles-ci par permutation cyclique, nous trouvons les expressions des déplacements en un point arbitraire $p(x_1, x_2, x_3)$. Il est commode d'écrire ces expressions sous forme compacte comme le produit d'une certaine matrice $\Gamma(p, q)$, dite *matrice de Kelvin-Somigliana*, par le vecteur $\boldsymbol{\varphi}(q)$:

$$\boldsymbol{u}(p) = \Gamma(p, q)\boldsymbol{\varphi}(q). \tag{1.1}$$

Les expressions des éléments de la matrice $\Gamma(p, q)$ sont (on introduit le facteur 2 pour alléger les expressions qui en seront déduites) :

$$\Gamma_{ij} = \frac{1}{4\pi(\lambda + 2\mu)\mu}\left[(\lambda+\mu)\frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{\partial r}{\partial x_j} + (\lambda + 3\mu)\delta_{ij}\right]\frac{1}{r(p, q)}.$$

Supposons donnés, sur une certaine surface fermée de Liapounov S de l'espace, les efforts $\boldsymbol{\varphi}(q)$. L'intégrale

$$\boldsymbol{V}(p) = \int_S \Gamma(p, q)\boldsymbol{\varphi}(q)\, dS_q \tag{1.2}$$

sera alors une fonction vectorielle vérifiant les équations de Lamé dans tout l'espace à l'exception de la surface S. Par analogie avec le potentiel harmonique, cette fonction est appelée ***potentiel élastique généralisé de couche simple.*** Nous supposerons dans la suite que la fonction $\boldsymbol{\varphi}(q)$, dite également *densité*, est de classe H.-L.

Indiquons certaines propriétés du potentiel $\boldsymbol{V}$, simplement analogues à celles d'un potentiel de couche simple. Le potentiel (1.2) peut être déterminé directement aux points de la surface (support de la couche) et ses valeurs limites (de l'intérieur et de l'extérieur) coïncident entre elles et sont égales à la valeur directe. Par conséquent, le potentiel généralisé de couche simple est une fonction vectorielle, continue dans tout l'espace. Notons que le potentiel $\boldsymbol{V}(p)$ tend à l'infini vers zéro comme $1/R$.

Donnons-nous maintenant un point p de l'espace et, dans son voisinage, un élément de surface muni de la normale orientée ν. Le vecteur des contraintes sollicitant cette surface peut alors être représenté à l'aide de l'opérateur des contraintes (3.37), ch. II, sous forme de l'intégrale

$$\boldsymbol{T}_\nu \boldsymbol{V}(p) = \int_S \boldsymbol{\Gamma}_1(p, q)\boldsymbol{\varphi}(q)\, dS_q, \tag{1.3}$$

où $\boldsymbol{\Gamma}_1(p, q)$ est une matrice d'éléments

$$\Gamma_{1ij} = -\left[m\delta_{ij} + n\frac{(x_i - y_i)(x_j - y_j)}{r^2}\right]\frac{\sum_{l=1}^{3}(x_l - y_l)\nu_{l(p)}}{r^3} + \\ + m\left[\nu_{i(p)}\frac{(x_j - y_j)}{r^3} - \nu_{j(p)}\frac{(x_i - y_i)}{r^3}\right] \tag{1.4}$$

$$\left(m = \frac{1}{2\pi}\frac{\mu}{\lambda + 2\mu},\quad n = \frac{3}{2\pi}\frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu}\right).$$

L'intervertissement dans (1.3) de l'ordre de différentiation et d'intégration est légitime en tous les points de l'espace sauf sur la surface S, étant donné la régularité de l'expression sous l'intégrale.

Nous considérerons maintenant les points situés à proximité immédiate de la surface S, de sorte qu'en chacun d'eux on peut définir univoquement une direction ν perpendiculaire à la surface. Le vecteur des contraintes défini par le potentiel de couche simple et par les directions indiquées de la normale sera donné par

$$\boldsymbol{T}_{\nu(q_1)}\boldsymbol{V}(p) = \int_S \boldsymbol{\Gamma}_1(p, q)\boldsymbol{\varphi}(q)\, dS_q. \tag{1.3'}$$

Le point q_1 est un point de la surface S tel que la normale qui en est issue passe par le point p.

Effectuons maintenant pour le vecteur des contraintes le passage à la limite (de l'extérieur et de l'intérieur) vers les points de la surface

$$\lim_{p\to q_1 (p\in D^-)} \boldsymbol{T}_{\nu(q_1)}\boldsymbol{V}(p) = \lim \int_S \boldsymbol{\Gamma}_1(p, q)\boldsymbol{\varphi}(q)\, dS_q = \boldsymbol{T}_\nu^- \boldsymbol{V}(q_1), \tag{1.5}$$

$$\lim_{p\to q_1 (p\in D^+)} \boldsymbol{T}_{\nu(q_1)}\boldsymbol{V}(p) = \lim \int_S \boldsymbol{\Gamma}_1(p, q)\boldsymbol{\varphi}(q)\, dS_q = \boldsymbol{T}_\nu^+ \boldsymbol{V}(q_1). \tag{1.6}$$

La valeur directe de l'intégrale

$$\int_S \Gamma_1(p, q)\varphi(q)\, dS_q$$

ne peut être considérée au sens usuel (en tant qu'intégrale impropre), car les derniers termes des éléments non diagonaux de (1.4) comportent une singularité du deuxième ordre. Elle doit être considérée au sens de la valeur principale (cf. § 3, ch. I). Il n'est pas difficile de montrer que sont alors vérifiées les conditions nécessaires d'existence de l'intégrale singulière (3.20), ch. I.

Soulignons encore une analogie avec le potentiel harmonique de couche simple. Les valeurs limites de l'opérateur des contraintes sont différentes entre elles et ne coïncident pas avec la valeur directe. Les dépendances correspondantes seront établies plus bas.

Revenons maintenant à la matrice $\Gamma_1(q_1, q)$ et construisons la matrice $\Gamma_2(q_1, q)$ qui lui est conjuguée ($\Gamma_{2ij}(q_1, q) = \Gamma_{1ji}(q, q_1)$) d'éléments

$$\Gamma_{2ij}(q_1, q) = \left[m\delta_{ij} + n\,\frac{(y_i - x_i)(y_j - x_j)}{r^2}\right]\sum_{l=1}^{3}\frac{(x_l - y_l)\nu_l(q)}{r^3} + \\ + m\left[\nu_i(q)\,\frac{x_j - y_j}{r^3} - \nu_j(q)\,\frac{x_i - y_i}{r^3}\right] \quad (q_1 = q_1(x_1, x_2, x_3)). \qquad (1.7)$$

Il est aisé de montrer que chacune des colonnes de la matrice $\Gamma_2(p, q)$ vérifie l'équation de Lamé par rapport à la variable p. Par suite le produit $\Gamma_2(p, q)\varphi(q)$ ($\varphi(q)$ étant un vecteur arbitraire) vérifiera ces équations dans tout l'espace excepté le point q. Il peut être interprété comme le champ des déplacements engendré dans tout l'espace par le moment concentré $\varphi(q)$ s'exerçant au point q du plan de normale ν. Considérons maintenant l'intégrale

$$W(p) = \int_S \Gamma_2(p, q)\varphi(q)\, dS_q, \qquad (1.8)$$

où S est comme auparavant une surface de Liapounov. L'intégrale (1.8) s'appelle *potentiel élastique généralisé de couche double* *). Il découle des formules (1.7) que la valeur directe du potentiel (1.8) est une intégrale singulière. Plus bas seront établies (sous l'hypothèse que la densité est de classe H.-L.) les relations existant entre les valeurs limites et directe du potentiel de couche double.

Pour démontrer les affirmations avancées il est nécessaire de procéder à certaines constructions. Ayons recours à la seconde

---

*) Dans la littérature spécialisée [72] on ajoute parfois l'expression « de première espèce ». Les potentiels mentionnés ont été introduits dans l'article [7].

formule de Betti (4.26), ch. II, que nous appliquerons pour le domaine compris entre la surface donnée S et la sphère σ_ε de rayon ε, centrée en un point p_0. Supposons par ailleurs que le déplacement $\boldsymbol{u}(p)$ vérifie l'équation de Lamé dans tout le domaine D^+ et que le déplacement $\boldsymbol{v}(p)$ est engendré par une force appliquée au point p_0 et possédant une seule composante égale à l'unité (la i-ième, admettons), les autres étant nulles. Dans la suite ces forces seront désignées par $\boldsymbol{a}_i$. Avec les notations introduites, nous obtenons

$$\boldsymbol{v}_i(p) = \Gamma(p, p_0)\boldsymbol{a}_i .$$

Commençons les constructions par le cas $i = 1$. La formule de Betti prend alors la forme

$$\int\limits_{D^+ \cap |p-p_0|>\varepsilon} (\boldsymbol{u}\Delta^*\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_1\Delta^*\boldsymbol{u})\, d\Omega = \int\limits_{S+\sigma_\varepsilon} (\boldsymbol{u}\boldsymbol{T}_\nu\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_1\boldsymbol{T}_\nu\boldsymbol{u})\, dS = 0, \quad (1.9)$$

puisque les intégrales de volume disparaissent, étant donné que dans le domaine considéré les déplacemets $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ vérifient les équations de Lamé. Considérons l'intégrale

$$\int\limits_{\sigma_\varepsilon} \boldsymbol{v}_1\boldsymbol{T}_\nu\boldsymbol{u}\, dS.$$

Comme le déplacement $\boldsymbol{v}_1(p)$ admet au point p_0 un pôle du premier ordre et les contraintes $\boldsymbol{T}_\nu\boldsymbol{u}$ sont bornées, l'intégrale considérée doit tendre vers zéro lorsque $\varepsilon \to 0$. Quant à l'intégrale

$$\int\limits_{\sigma_\varepsilon} \boldsymbol{u}\boldsymbol{T}_\nu\boldsymbol{v}_1\, dS,$$

étant donné la continuité du déplacement $\boldsymbol{u}(p)$ au voisinage du point p_0, celle-ci doit à la limite coïncider avec l'intégrale

$$\boldsymbol{u}(p_0)\int\limits_{\sigma_\varepsilon} \boldsymbol{T}_\nu\boldsymbol{v}_1\, dS. \quad (1.10)$$

Calculons (1.10) dans un repère sphérique. Nous obtenons

$$\int\limits_{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r(p, p_0)}\, dS_p = -4\pi,$$

$$\int\limits_{\sigma_\varepsilon} \left(\frac{\partial r}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial x_j}\right)\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r(p, p_0)}\, dS_p = 0 \quad (i \neq j),$$

$$\int\limits_{\sigma_\varepsilon} \left(\frac{\partial r}{\partial x_i}\right)^2 \frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r(p, p_0)}\, dS_p = -\frac{4}{3}\pi.$$

Des considérations de parité découlent les égalités

$$\iint_{\sigma_\varepsilon}\left[\nu_i(p)\frac{x_j-y_j}{r^3}-\nu_j(p)\frac{x_i-y_i}{r^3}\right]dS_p=0.$$

Connaissant les valeurs de toutes les intégrales entrant dans (1.10) nous aurons à la limite la représentation de la composante $u_1(p)$ sous la forme

$$2u_1(p_0)=-\int_S T_{\nu(p)}\Gamma(p_0,\,p)\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{u}(p)\,dS_p+$$

$$+\int_S \Gamma(p_0,\,p)\boldsymbol{a}_1 T_{\nu(p)}\boldsymbol{u}(p)\,dS_p. \quad (1.11)$$

Des formules analogues seront obtenues avec les déplacements $\boldsymbol{v}_2$ et $\boldsymbol{v}_3$. Le résultat définitif s'écrit

$$2\boldsymbol{u}(p)=-\int_S \Gamma_2(p,\,q)\boldsymbol{u}(q)\,dS_q+\int_S \Gamma(p,\,q)T_\nu\boldsymbol{u}(q)\,dS_q. \quad (1.12)$$

Si le point p est choisi en dehors de la surface S, nous obtenons d'emblée

$$0=-\int_S \Gamma_2(p,\,q)\boldsymbol{u}(q)\,dS_q+\int_S \Gamma(p,\,q)T_\nu\boldsymbol{u}(q)dS_q. \quad (1.13)$$

Effectuant des constructions analogues dans le cas où le déplacement $\boldsymbol{u}(p)$ est défini dans le domaine D^- extérieur à la surface S, nous obtenons les formules

$$2\boldsymbol{u}(p)=\int_S \Gamma_2(p,\,q)\boldsymbol{u}(q)\,dS_q-\int_S \Gamma(p,q)T_\nu\boldsymbol{u}(q)\,dS_q \quad (p\in D^-), \quad (1.14)$$

$$0=\int_S \Gamma_2(p,\,q)\boldsymbol{u}(q)\,dS_q-\int_S \Gamma(p,\,q)T_\nu\boldsymbol{u}(q)\,dS_q \quad (p\in D^+). \quad (1.15)$$

Les formules de Betti étant valables dans le cas de domaines limités par plusieurs surfaces, il en sera évidemment de même des identités obtenues *).

Revenons maintenant aux valeurs limites des déplacements engendrés par un potentiel de couche double et des contraintes engendrées par un potentiel de couche simple.

*) Notons que les identités (1.12) à (1.15) ne donnent pas la solution du problème aux limites puisque d'après la position de celui-ci sur la surface frontière sont donnés soit les déplacements, soit les contraintes. Néanmoins, elles seront utilisées pour l'élaboration de la solution.

Commençons par le premier problème. Donnons-nous dans le domaine D^+ une fonction vectorielle de grandeur constante φ_0 et considérons-la comme le déplacement du domaine D^+ en entier. De (1.12) nous obtenons alors l'égalité

$$2\varphi_0 = -\int_S \Gamma_2(p, q)\varphi_0 \, dS_q, \tag{1.16}$$

si le point est pris dans le domaine D^+. Choisissant celui-ci dans le domaine D^-, nous trouvons conformément à (1.13)

$$0 = \int_S \Gamma_2(p, q)\varphi_0 \, dS_q. \tag{1.17}$$

Passons au calcul de la valeur singulière (directe) de l'intégrale

$$\int_S \Gamma_2(p, q)\varphi_0 \, dS_q, \quad p \in S.$$

Soit un point $q_1 \in S$; décrivons une sphère de rayon ε et de centre en q_1. Désignons par σ_ε^+ et σ_ε^- ses parties appartenant respectivement aux domaines D^+ et D^-. Notons S_ε la partie de la surface S située hors de cette sphère.

Appliquons l'identité (1.16) au domaine délimité par la surface $S_\varepsilon \cup \sigma_\varepsilon^+$. L'intégrale s'avère égale à $-2\varphi_0$. L'appliquant au domaine délimité par la surface $S_\varepsilon + \sigma_\varepsilon$ nous obtenons zéro. La surface S étant régulière (nous nous intéressons à la régularité locale au voisinage du point q_1), nous obtenons qu'à la limite lorsque $\varepsilon \to 0$ les intégrales sur σ_ε^+ et σ_ε^- s'avèrent identiques (au signe près). Donc

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{S_\varepsilon} \Gamma_2(q_1, q)\varphi_0 \, dS_q = \int_S \Gamma_2(q_1, q)\varphi_0 \, dS_q = -\varphi_0. \tag{1.18}$$

Rappelons que c'est ainsi qu'a été définie la valeur principale de l'intégrale singulière bidimensionnelle (cf. § 3, ch. I).

Ce que nous venons d'exposer constitue le *théorème généralisé de Gauss*. Donnons-le sous une autre forme

$$\begin{aligned} &\int_S \Gamma_2(p, q)\, dS_q = -2E \quad (p \in D^+),\\ &\int_S \Gamma_2(p, q)\, dS_q = 0 \qquad (p \in D^-),\\ &\int_S \Gamma_2(q_1, q)\, dS_q = -E \quad (q_1 \in S), \end{aligned} \tag{1.19}$$

où E est la matrice unité, 0 la matrice nulle.

Le théorème de Gauss permet d'établir aisément les propriétés du potentiel généralisé de couche double. Transformons le potentiel (1.8) :

$$W(p) = \int_S \Gamma_2(p, q)\varphi(q)\, dS_q =$$

$$= \int_S \Gamma_2(p, q)[\varphi(q) - \varphi(q_1)]\, dS_q + \int_S \Gamma_2(p, q)\varphi(q)\, dS_q, \quad (1.20)$$

où q_1 est un point de la surface S au voisinage duquel on étudie maintenant les propriétés limites.

Supposons que le point p tend par un chemin quelconque (de l'intérieur ou de l'extérieur) vers le point q_1. La première intégrale figurant dans (1.20) est une intégrale impropre convergeant uniformément, donc évidemment une fonction continue (bien entendu à condition que $\varphi(q)$ soit de classe H.-L.). Le comportement de la deuxième intégrale est déjà étudié.

Les raisonnements précédents nous conduisent aux égalités suivantes :

$$W^+(q_1) - W^-(q_1) = -2\varphi(q_1), \quad W^+(q_1) + W^-(q_1) = 2W^-(q_1). \quad (1.21)$$

Ecrivons ces égalités sous une autre forme :

$$W^+(q_1) = -\varphi(q_1) + W(q_1), \quad W^-(q_1) = \varphi(q_1) + W(q_1), \quad (1.21')$$

où $W(q_1)$ est la valeur directe du potentiel de couche double.

Examinons maintenant les valeurs limites de l'opérateur des contraintes engendrées par le potentiel de couche simple. Représentons l'intégrale (1.3) sous la forme

$$T_{\nu(p)}V(p) = \int_S [\Gamma_1(p, q)\varphi(q) + \Gamma_2(p, q)\varphi(q_1)]\, dS_q -$$

$$- \int_S \Gamma_2(p, q)\varphi(q_1)\, dS_q, \quad (1.22)$$

où q_1 est un point de la surface S dans le voisinage duquel seront étudiées les propriétés qui nous intéressent. Le comportement de la dernière intégrale est défini par les formules (1.21). La première intégrale est constituée de deux groupes de termes. Les termes de l'un des groupes admettent une singularité d'ordre intégrable, mais figurent dans une combinaison telle que l'intégrale qu'ils définissent s'avère uniformément convergente et donc continue aux points de la surface. L'autre groupe est constitué de termes

admettant une singularité du deuxième ordre. L'intégrale qu'ils définissent s'avère continue, car sont satisfaites les conditions d'existence de l'intégrale singulière (3.20), ch. I.

Ecrivons les résultats définitifs

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{T}_\nu \boldsymbol{V}(q_1)]^+ - [\boldsymbol{T}_\nu \boldsymbol{V}(q_1)]^- &= 2\varphi(q_1),\\ [\boldsymbol{T}_\nu \boldsymbol{V}(q_1)]^+ + [\boldsymbol{T}_\nu \boldsymbol{V}(q_1)]^- &= 2\boldsymbol{T}_\nu \boldsymbol{V}(q_1)\end{aligned} \qquad (1.23)$$

ou sous une autre forme

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{T}_\nu \boldsymbol{V}(q_1)]^+ &= \varphi(q_1) + \boldsymbol{T}_\nu \boldsymbol{V}(q_1),\\ [\boldsymbol{T}_\nu \boldsymbol{V}(q_1)]^- &= -\varphi(q_1) + \boldsymbol{T}_\nu \boldsymbol{V}(q_1),\end{aligned} \qquad (1.23')$$

$\boldsymbol{T}_\nu \boldsymbol{V}$ est la valeur directe de l'opérateur des contraintes engendrées par le potentiel de couche simple.

Ces formules établissent justement l'existence des valeurs limites correspondantes.

Donnons sans démonstration le *théorème de Liapounov-Taubert* disant que si l'opérateur des contraintes engendrées par le potentiel de couche double admet les valeurs limites d'un côté de la surface, il en admet de l'autre côté aussi, avec par ailleurs,

$$[\boldsymbol{T}_\nu \boldsymbol{W}]^+ = [\boldsymbol{T}_\nu \boldsymbol{W}]^-. \qquad (1.24)$$

Examinons l'intégrale de volume

$$\boldsymbol{U}(p) = \int_\Omega \Gamma(p, p_1)\varphi(p_1)\, d\Omega_{p_1}, \qquad (1.25)$$

appelée *potentiel élastique généralisé de volume* (*newtonien*). Nous supposerons que la fonction $\varphi(p)$ est une fonction mesurable bornée vérifiant à l'infini la condition $|\varphi(p)| \leqslant c/R^3$. Il est commode de supposer l'intégrale étendue à l'espace tout entier, en posant la fonction $\varphi(p)$ nulle dans le domaine complémentaire.

Montrons que sous certaines conditions sur la régularité de la densité, ce potentiel vérifie l'équation de Lamé non homogène pour un second membre égal au double de la densité [117].

Introduisons en considération l'opérateur

$$\Delta^{**} = \frac{1}{a^2}\,\mathrm{grad\,div} - \frac{1}{b^2}\,\mathrm{rot\,rot}, \qquad (1.26)$$

où $a^2 = \lambda + 2\mu$ et $b^2 = \mu$. Rappelons que l'opérateur de Lamé peut être représenté sous la forme (cf. § 4, ch. II)

$$\Delta^* = a^2\,\mathrm{grad\,div} - b^2\,\mathrm{rot\,rot}.$$

Introduisons en considération la matrice Ω d'éléments

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{4\pi}\,\delta_{ij} r. \qquad (1.27)$$

Il est immédiat que

$$\Gamma(p, q) = \Delta^{**}\Omega(p, q). \tag{1.28}$$

En effet, prenons, par exemple, l'élément Γ_{12}. Conformément à (1.28) nous avons

$$\Gamma_{12} = \left(\frac{1}{a^2}\operatorname{grad}_{x_2}\operatorname{div}\Omega^1 - \frac{1}{b^2}\operatorname{rot}_{x_2}\operatorname{rot}\Omega^1\right) =$$

$$= \frac{1}{2a^2}\frac{\partial^2 r}{\partial x_1\,\partial x_2} - \frac{1}{b^2}\left(\frac{\partial}{\partial x_3}\operatorname{rot}_{x_1}\Omega^1 - \frac{\partial}{\partial x_1}\operatorname{rot}_{x_3}\Omega^1\right) =$$

$$= \frac{1}{2a^2}\frac{\partial^2 r}{\partial x_1\,\partial x_2} - \frac{1}{2b^2}\frac{\partial^2 r}{\partial x_1\,\partial x_2} = m\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial x_1}\frac{\partial r}{\partial x_2},$$

où Ω_1 est un vecteur de composantes Ω_{11}, Ω_{12}, Ω_{13}. De même pour l'élément Γ_{11} :

$$\Gamma_{11} = \frac{1}{2a^2}\frac{\partial^2 r}{\partial x_1^2} - \frac{1}{b^2}\left(\frac{\partial}{\partial x_3}\operatorname{rot}_{x_2}\Omega^1 - \frac{\partial}{\partial x_2}\operatorname{rot}_{x_3}\Omega^1\right) =$$

$$= \frac{1}{2a^2}\frac{\partial^2 r}{\partial x_1^2} + \frac{1}{2b^2}\left(\frac{\partial^2 r}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial x_3^2}\right) = \frac{1}{2a^2}\frac{\partial^2 r}{\partial x_1^2} + \frac{1}{2b^2}\left(\frac{2}{r} - \frac{\partial^2 r}{\partial x_1^2}\right) =$$

$$= \frac{n}{r} + \frac{m}{r}\left(\frac{\partial r}{\partial x_1}\right)^2.$$

Transformons maintenant le potentiel de volume (1.25) à l'aide de l'égalité (1.28). Nous avons

$$U(p) = \int_{\Omega} \Delta^{**}\Omega(p, p_1)\varphi(p_1)\,d\Omega_{p_1}. \tag{1.29}$$

Appliquant à (1.29) l'opérateur de Lamé, nous obtenons

$$\Delta^* U(p) = \Delta^*\Delta^{**}\int_{\Omega} \Omega(p, p_1)\varphi(p_1)\,d\Omega_{p_1}. \tag{1.30}$$

Il est facile de s'assurer qu'on a l'égalité

$$\Delta^*\Delta^{**} = \frac{1}{2\pi}\begin{pmatrix} \Delta\Delta & 0 & 0 \\ 0 & \Delta\Delta & 0 \\ 0 & 0 & \Delta\Delta \end{pmatrix} \tag{1.31}$$

qui permet de représenter l'intégrale figurant dans le second membre de (1.30) sous la forme

$$\Delta^* U(p) = \frac{1}{4\pi}\int_{\Omega} \Delta\Delta r(p, p_1)\varphi(p)\,d\Omega_{p_1} = \frac{\Delta}{2\pi}\int_{\Omega} \frac{\varphi(p_1)}{r(p, p_1)}\,d\Omega. \tag{1.32}$$

Quant à la dernière intégrale, elle est, en vertu de (6.32), ch. I, égale au double de la densité $\varphi(p)$ avec le signe « — ».

Les méthodes que nous avons exposées sont applicables à la résolution des problèmes de la théorie des oscillations. La théorie est bâtie naturellement autour de la solution obtenue pour une force concentrée à variation périodique. La matrice généralisée de Kelvin-Somigliana sera notée $\Gamma(p, q, \omega)$. Ses éléments sont

$$\Gamma_{ij}(p, q, \omega) = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{\mu}\delta_{ij} - \frac{e^{ik_2 r}}{r} - \frac{1}{\rho\omega^2}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left(\frac{e^{ik_1 r}}{r} - \frac{e^{ik_2 r}}{r}\right)\right], \quad (1.33)$$

où

$$k_1^2 = \frac{\rho\omega^2}{\lambda + 2\mu}, \quad k_2^2 = \frac{\rho\omega^2}{\mu}.$$

Les potentiels de couche simple, de couche double et le potentiel de volume sont construits au moyen de cette matrice. Ces potentiels jouissent pratiquement des mêmes propriétés que les potentiels considérés plus haut dans les problèmes de la statique. Les conditions à l'infini sont identiques aux conditions de rayonnement (cf. § 1, ch. III).

Abordons les problèmes dynamiques généraux. Pour leur étude on peut élaborer des potentiels élastiques généralisés [45] (du type de potentiels de retard de l'équation d'onde (§ 9, ch. I)), ou bien utiliser directement les potentiels d'onde, ayant préalablement représenté les déplacements par quatre fonctions d'onde (cf. § 5, ch. III) [46].

Une approche foncièrement différente est présentée dans [75]. On opère une transformation de Laplace par rapport au temps et on effectue toutes les constructions avec les transformées des déplacements. L'équation différentielle obtenue pour celles-ci peut être interprétée en tant qu'équation pour des amplitudes (cf. § 4, ch. II) à fréquence complexe. Aussi s'avère-t-il possible d'élaborer la solution pour la transformée au moyen de potentiels s'appuyant sur la solution fondamentale (1.33).

Donnons quelques résultats [75] concernant les propriétés différentielles des potentiels élastiques. Si $S \in V_{k+1}(\alpha)$ et la densité $\varphi \in C^{l,\beta}$ $(0 < \beta < \alpha \leqslant 1,\ 0 \leqslant l \leqslant k+1)$, alors le potentiel de couche double dans le domaine fermé $\bar{D} = D \cup S$

$$W(\varphi) \in C^{l,\beta}. \quad (1.34)$$

Si, par contre, $S \in V_{k+1}(\alpha)$, $\varphi \in C^{l,\beta}$ $(0 < \beta < \alpha \leqslant 1,\ 0 \leqslant l \leqslant k)$, alors le potentiel de couche simple

$$V(\varphi) \in C^{l+1,\beta}. \quad (1.35)$$

§ 2. Equations intégrales des problèmes spatiaux fondamentaux

Les potentiels introduits plus haut permettent de ramener la résolution des problèmes aux limites fondamentaux de l'élasticité à des équations intégrales de deuxième espèce. Considérons

tout d'abord le premier problème fondamental. Soit à déterminer, pour un corps élastique occupant un domaine D délimité par une surface S, les déplacements qui tendent à la limite vers les valeurs données $\boldsymbol{F}_1(q)$ (cf. (1.1), ch. III). Nous rechercherons les déplacements sous la forme d'un potentiel élastique généralisé de couche double (1.8). Dans ce cas, conformément à la formule (1.21) nous sommes conduits aux équations intégrales

$$\boldsymbol{\varphi}(q) \pm \int_S \boldsymbol{\Gamma}_2(q, q_1)\boldsymbol{\varphi}(q_1)\, dS_{q_1} = \mp \boldsymbol{F}_1(q). \tag{2.1}$$

Le signe supérieur correspond au problème extérieur (I^-), le signe inférieur, au problème intérieur (I^+). Représentons ces équations sous une forme unifiée correspondant à la forme traditionnelle d'écriture des équations de Fredholm de deuxième espèce, en introduisant le paramètre λ qui prend les valeurs 1 ou -1 :

$$\boldsymbol{\varphi}(q) - \lambda \int_S \boldsymbol{\Gamma}_2(q, q_1)\boldsymbol{\varphi}(q_1)\, dS_{q_1} = \boldsymbol{F}(q). \tag{2.2}$$

Au problème I^+ correspond $\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{F}_1$, au problème I^-, $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1$.

Pour résoudre le problème fondamental II il convient d'utiliser la représentation des déplacements sous forme de potentiel généralisé de couche simple (1.2). Des formules (1.23) nous déduisons alors des équations intégrales de deuxième espèce

$$\boldsymbol{\varphi}(q) - \lambda \int_S \boldsymbol{\Gamma}_1(q, q_1)\boldsymbol{\varphi}(q_1)\, dS_{q_1} = \boldsymbol{F}(q). \tag{2.3}$$

Etablissons d'autres équations singulières pour le problème II*). Dans le cas du problème intérieur faisons appel à l'identité (1.12) ou (1.13) et passons à la limite vers les points de la surface. Supposons connue l'intégrale des valeurs limites des contraintes que nous notons $\boldsymbol{\Phi}(q)$. Les formules (1.21) permettent d'écrire

$$\boldsymbol{u}(q) + \int_S \boldsymbol{\Gamma}_2(q, q_1)\boldsymbol{u}(q_1)\, dS_{q_1} = \boldsymbol{\Phi}(q). \tag{2.4}$$

Nous avons là des équations intégrales singulières par rapport aux déplacements sur la surface frontière. Le problème extérieur est étudié de façon analogue (on utilise alors l'identité (1.14) ou

*) De façon analogue on peut obtenir les équations pour le problème I aussi, mais la construction effective de leurs seconds membres étant très difficile, elles ne seront pas considérées.

(1.15)). Rapportons le résultat définitif

$$u(q) - \lambda \int_S \Gamma_2(q, q_1) u(q_1) \, dS_{q_1} = \Phi(q), \qquad (2.5)$$

où $\lambda = 1$ correspond au problème II^-, et $\lambda = -1$ au problème II^+.

Les équations (2.5) sont identiques aux équations du problème I, obtenues à partir des représentations des déplacements sous forme de potentiel de couche double et différant naturellement de celles-ci par le sens physique de la fonction recherchée et par les valeurs du second membre.

Sur le plan mathématique, les équations (2.3) et (2.5) ne présentent pas d'avantage l'une sur l'autre. Nous en reparlerons au § 3, comparant celles-ci du point de vue de leur réalisation numérique.

Remarquons que les équations (2.2) ou (2.3) (et également (2.5) et (2.3)) sont associées l'une de l'autre. Pour les équations singulières l'indice (la différence entre le nombre de fonctions propres de l'équation initiale et de l'équation associée) peut être, en général, un nombre entier arbitraire. Montrons que pour les équations singulières construites plus haut l'indice est nul. Par conséquent [92], il existe un opérateur qui les transforme en équations régulières équivalentes de deuxième espèce, donc les alternatives de Fredholm sont applicables aux équations initiales.

On a indiqué au § 3, ch. I, que la condition nécessaire et suffisante de nullité de l'indice dans le cas d'un système d'équations singulières est la non-nullité du déterminant symbolique, quand la matrice symbolique elle-même est hermitienne. Notons que lors d'un changement de variables l'argument de chaque élément du déterminant symbolique subit une transformation linéaire, de même que l'argument du déterminant lui-même, de sorte que l'ensemble de ses valeurs est invariant par rapport au changement de variables. Cette circonstance permet de proposer le procédé d'étude suivant.

Introduisons en un point q de la surface des coordonnées locales, disposant les axes x_1 et x_2 dans le plan tangent et l'axe x_3 suivant la normale. Nous définirons le vecteur $\varphi(q)$ par ses projections sur les axes choisis, ce qui n'aura pas d'influence sur le résultat. Le système d'équations (2.3) peut s'écrire alors sous la forme

$$\varphi_1(q) \pm A \int_S \frac{x_1 - y_1}{r^3} \varphi_3(q_1) \, dS_{q_1} + T_1 \varphi = F_1(q),$$

$$\varphi_2(q) \pm A \int_S \frac{x_2 - y_2}{r^3} \varphi_3(q_1) \, dS_{q_1} + T_2 \varphi = F_2(q),$$

$$\varphi_3(q) \pm A \int_S \frac{(x_1 - y_1)\varphi_1(q_1) + (x_2 - y_2)\varphi_2(q_1)}{r^3} \, dS_{q_1} + T_3 \varphi = F_3(q),$$

où T_i sont des opérateurs réguliers, $A = (2\sigma - 1)/(1 - \sigma)$.

Les caractéristiques des intégrales singulières de ce système se trouvent d'emblée : $\frac{x_1 - y_1}{r} = \cos\theta$ et $\frac{x_2 - y_2}{r} = \sin\theta$. Le déterminant symbolique s'écrit alors

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & iA\cos\theta \\ 0 & 1 & iA\sin\theta \\ -iA\cos\theta & -iA\sin\theta & 1 \end{vmatrix} = 1 - A^2 = \frac{3-4\sigma}{4(1-\sigma)^2}.$$

On voit que pour des valeurs usuelles du coefficient de Poisson ($0 \leqslant \sigma < 0{,}5$) il est différent de zéro.

Examinons maintenant les propriétés spectrales des équations (2.2), (2.3) et (2.5). Posons $\lambda = 1$ et admettons que ces équations possèdent des fonctions propres non triviales (vu la nullité de l'indice, elles sont au même nombre). Désignons par φ_0 la fonction propre de l'équation (2.3) et par $V(p, \varphi_0)$ le potentiel ayant comme densité la fonction φ_0. Ce potentiel est solution du problème II^- pour des valeurs nulles des contraintes sur la surface. Il est à noter que dans tous les cas les déplacements représentés par le potentiel de couche simple décroissent à l'infini comme $1/R$ et les contraintes comme $1/R^2$. Aussi peut-on utiliser le théorème d'unicité de solution du problème extérieur de l'élasticité. Nous obtenons alors que le potentiel V est identiquement nul dans le domaine D^-. D'autre part, le potentiel de couche simple est une fonction continue partout, y compris la surface S. Ceci étant, le potentiel $V(p, \varphi_0)$ sera identiquement nul dans le domaine D^+ puisqu'il s'annule sur la surface S. Revenant à la formule (1.24) nous obtenons que la fonction φ_0 est identiquement nulle. Par conséquent, le point $\lambda = 1$ n'est pas fonction propre des équations (2.3), (2.4) et (2.5). Ces équations sont donc résolubles pour un second membre arbitraire et les solutions obtenues sont uniques.

Posons $\lambda = -1$. On a établi au § 1 du chapitre III l'existence de la solution du problème II^+ pour des valeurs nulles des contraintes sur la frontière. Cette solution s'écrit

$$u_1 = a_1 + qx_3 - rx_2, \quad u_2 = a_2 + rx_1 - px_3, \quad u_3 = a_3 + px_2 - qx_1, \tag{2.6}$$

où a_1, a_2, a_3, p, q et r sont des constantes arbitraires caractérisant le mouvement de solide du milieu considéré.

Soit $\boldsymbol{u}_0$ un déplacement de solide du milieu. Montrons que dans ce cas la fonction $\boldsymbol{u}_0(q)$ est une fonction propre de l'équation (2.2). En effet, de (1.12) nous tirons

$$\boldsymbol{u}_0(p) = -\frac{1}{2}\int_S \Gamma_2(p, q)\boldsymbol{u}_0(q)\, dS_q. \tag{2.7}$$

Réalisant le passage à la limite vers les points de la surface S nous parvenons à l'identité

$$u_0(q_1) + \int_S \Gamma_2(q_1, q) u_0(q)\, dS_q = 0, \tag{2.8}$$

traduisant le fait que la fonction $\varphi_0(q)$ est la fonction propre de l'équation (2.2) pour $\lambda = -1$.

Notons φ_{1i} $(i = 1, 2, \ldots, 6)$ les fonctions propres de l'équation (2.2) pour $\lambda = -1$. On peut les obtenir, par exemple, en posant successivement l'une des constantes $a_1, a_2, \ldots, r$ égale à l'unité et les autres à zéro. Formons en outre les potentiels $W(p, \varphi_{1i})$. Il découle de (2.8) que leurs valeurs limites de l'intérieur de la surface s'annulent et ensuite du théorème d'unicité pour le problème I^+ qu'elles sont identiquement nulles dans le domaine D^+.

L'équation (2.2) admettant six fonctions propres pour $\lambda = -1$, l'équation associée (2.3) admettra six fonctions propres aussi que nous noterons φ_{2i}. Formons les potentiels $V(p, \varphi_{2i})$. Comme ces potentiels correspondent à des conditions aux limites nulles en contraintes, ils traduisent le déplacement de solide du corps *).

Ainsi, on a établi que les équations (2.2), (2.3) et (2.5) admettent des fonctions propres pour $\lambda = -1$.

Voyons maintenant quelles sont les conditions de résolubilité. Conformément à l'alternative de Fredholm (cf. § 2, ch. I), la condition nécessaire et suffisante de résolubilité des équations ayant pour solutions le spectre de leurs valeurs propres est l'orthogonalité des seconds membres et des fonctions propres des équations associées. Les fonctions propres de l'équation (2.2) étant établies, nous obtenons immédiatement les conditions de résolubilité de l'équation (2.3) sous la forme

$$\int_S F(q) \varphi_{1i}(q)\, dS = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, 6). \tag{2.9}$$

Ces conditions ont un sens mécanique assez clair. Puisque les fonctions φ_{1i} sont des fonctions linéaires, on peut les choisir sous forme élémentaire comme conseillé plus haut. Nous obtenons dans ce cas les égalités

$$\begin{gathered} \int_S F_i(q)\, dS = 0, \quad \int_S (F_i x_{i+1} - F_{i+1} x_i)\, dS = 0, \\ \int_S (F_i x_{i+2} - F_{i+2} x_i)\, dS = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \end{gathered} \tag{2.10}$$

*) Il s'agit plutôt des déplacements de la surface, car, après le passage aux équations intégrales, la notion de domaine disparaît des raisonnements.

où F_i sont les composantes du vecteur $F(q)$. Pour simplifier l'écriture, nous avons posé dans (2.10) $x_4 = x_1$, $x_5 = x_2$, $F_4 = F_1$, $F_5 = F_2$. Il est maintenant clair que ces conditions expriment la nullité du vecteur résultant et du vecteur moment des efforts s'exerçant sur le corps, ce qui est nécessaire d'après la position du problème (cf. § 1, ch. III). Aussi convient-il d'exiger la réalisation de ces conditions. Donc pour $\lambda = -1$ l'équation (2.3) admet toujours une solution *), qui dans ce cas n'est pas univoque. A chaque solution particulière il faut ajouter toutes ses fonctions propres. Mais comme on a établi plus haut, les potentiels $V(p, \varphi_{1i})$ traduisent le mouvement de solide et donc n'influent pas sur l'état de contrainte, de sorte qu'on n'a pas besoin de construire les fonctions propres.

Envisageons maintenant le problème I^-. Représentant les déplacements sous forme de potentiel de couche double on est conduit à la restriction qu'il faut imposer au comportement de la solution à l'infini ($|u(p)| < c/R^2$), quoique d'après la position du problème une telle restriction ne soit pas exigée. Aussi l'équation (2.2) peut-elle s'avérer irrésoluble. Remarquons que l'établissement même de ce fait représente un problème assez complexe puisqu'il est nécessaire de déterminer les fonctions propres de l'équation associée.

Toute une série de procédés consistant le plus souvent en une modification de la représentation des déplacements permettent d'obtenir des équations résolubles. On peut, par exemple, déterminer les déplacements dus à l'application en un point $p_0 \in D^+$ d'une force concentrée et d'un moment et ajouter les résultats obtenus aux déplacements cherchés. Nous parviendrons à la même équation intégrale (2.2), mais la condition aux limites contiendra alors six paramètres numériques déterminant la force et le moment. Ces paramètres pourront être tirés de la condition de réalisation des relations d'orthogonalité.

Indiquons encore une approche [14], selon laquelle les déplacements sont recherchés comme une somme de potentiels de couche double et simple (avec une même densité qu'il faut déterminer). L'équation obtenue dans ce cas est toujours résoluble. Le problème I^- sera considéré en détail plus loin comme un cas particulier du problème concernant un domaine délimité par plusieurs surfaces.

Revenons maintenant au problème II^+, prenant cette fois l'équation (2.5). Dans ce cas le second membre de cette équation est de structure très complexe (on n'en peut pas tirer d'emblée les conditions d'auto-équilibre des forces extérieures) ; d'autre

*) La présence au point $\lambda = -1$ d'un pôle de la résolvante entraîne certaines difficultés liées à l'erreur de réalisation numérique. Plus en détail il en sera question au § 3.

part sont inconnues les fonctions propres de l'équation associée. Représentons les conditions de résolubilité de l'équation (2.5) sous la forme

$$\int_S \varphi_{2i}(q)\Phi(q)\,dS_q = \int_S \varphi_{2i}(q)\int_S \Gamma(q,\,q_1)F_2(q_1)\,dS_{q_1}dS_q = 0. \quad (2.11)$$

Changeant dans (2.11) l'ordre d'intégration, nous obtenons

$$\int_S \varphi_{2i}(q)\Phi(q)\,dS_q = \int_S F_2(q)V(q,\,\varphi_{2i})\,dS_q. \quad (2.12)$$

Les potentiels $V(q,\,\varphi_{2i})$ traduisant le mouvement de solide, les conditions (2.11) sont identiques aux conditions (2.9).

Les propriétés examinées des équations intégrales permettent de répondre si celles-ci sont résolubles ou non (excepté dans le cas du problème I^-). Pour la construction effective de la solution par la méthode des approximations successives il est désirable d'établir son applicabilité *). On procède pour cela à une étude complète des propriétés spectrales de ces équations (dans le plan de la variable complexe λ).

Récrivons l'équation (2.3) à l'aide des formules (1.24):

$$(1-\lambda)[T_\nu V]^+ - (1+\lambda)[T_\nu V]^- = 2F(q). \quad (2.13)$$

Supposons que les équations intégrales considérées admettent des valeurs propres complexes. Désignons l'une d'elles par $\lambda_0 = a + ib$ et soit $\varphi_0(q) = \varphi_a + i\varphi_b$ une fonction propre. Formons un potentiel de couche simple $V_0 = V(p,\,\varphi_0)$ et portons celui-ci dans (2.13). Nous obtenons

$$(1-\lambda_0)\{[T_\nu V_a]^+ + i[T_\nu V_b]^+\} = (1+\lambda_0)\{[T_\nu V_a]^- + i[T_\nu V_b]^-\}. \quad (2.13')$$

Multiplions (2.13') par $V_a - iV_b$ et intégrons l'égalité obtenue suivant la surface S. Ceci nous donne

$$(1-\lambda_0)\int_S \{V_a[T_\nu V_a]^+ + V_b[T_\nu V_b]^+\}\,dS +$$
$$+ i(1-\lambda_0)\int_S \{V_a[T_\nu V_b]^+ - V_b[T_\nu V_a]^+\}\,dS =$$
$$= (1+\lambda_0)\int_S \{V_a[T_\nu V_a]^- + V_b[T_\nu V_b]^-\}\,dS +$$
$$+ i(1+\lambda_0)\int_S \{V_a[T_\nu V_b]^- - V_b[T_\nu V_a]^-\}\,dS. \quad (2.14)$$

*) Cette question sera étudiée en détail au § 3.

Transformons cette identité à l'aide de la deuxième formule de Betti (4.26'), ch. II, l'appliquant aux déplacements $\boldsymbol{V}_a$ et $\boldsymbol{V}_b$. Nous obtenons dans ce cas les égalités

$$\begin{aligned}\int_S \{\boldsymbol{V}_a[\boldsymbol{T}_\nu \boldsymbol{V}_b]^+ - \boldsymbol{V}_b[\boldsymbol{T}_\nu \boldsymbol{V}_a]^+\}\, dS = 0,\\ \int_S \{\boldsymbol{V}_a[\boldsymbol{T}_\nu \boldsymbol{V}_b]^- - \boldsymbol{V}_b[\boldsymbol{T}_\nu \boldsymbol{V}_a]^-\}\, dS = 0,\end{aligned} \tag{2.15}$$

qui permettent de récrire (2.14) sous la forme

$$(1-\lambda_0)\int_S \{\boldsymbol{V}_a[\boldsymbol{T}_\nu \boldsymbol{V}_a]^+ + \boldsymbol{V}_b[\boldsymbol{T}_\nu \boldsymbol{V}_b]^+\}\, dS = \\ = (1+\lambda_0)\int_S \{\boldsymbol{V}_a[\boldsymbol{T}_\nu \boldsymbol{V}_a]^- + \boldsymbol{V}_b[\boldsymbol{T}_\nu \boldsymbol{V}_b]^-\}\, dS. \tag{2.16}$$

Nous voyons que le rapport $(1-\lambda_0)/(1+\lambda_0)$ est un nombre réel, par conséquent λ_0 est aussi réelle. Nous avons établi que les équations intégrales (2.8) et (2.9) ne possèdent pas de valeurs propres complexes.

L'égalité (2.16) permet d'établir encore un résultat. Appliquons à cet effet la troisième formule de Betti (4.26'), ch. II, aux déplacements $\boldsymbol{V}_a$ et $\boldsymbol{V}_b$:

$$\begin{aligned}\int_S \boldsymbol{V}_c[\boldsymbol{T}_\nu \boldsymbol{V}_c]^+\, dS = \int_{D^+} W(\boldsymbol{V}_c)\, d\Omega,\\ \int_S \boldsymbol{V}_c[\boldsymbol{T}_\nu \boldsymbol{V}_c]^-\, dS = -\int_{D^-} W(\boldsymbol{V}_c)\, d\Omega \quad (c = a, b).\end{aligned} \tag{2.17}$$

Les deux membres de (2.16) étant de signes contraires, le rapport $(1-\lambda_0)/(1+\lambda_0)$ est un nombre négatif. Par conséquent $|\lambda_0| \geqslant 1$. D'autre part, le point $\lambda = 1$ correspond aux problèmes I^+ et II^-, dont les solutions sont uniques. La supposition que ce point est pôle de la résolvante conduirait à la non-unicité du problème aux limites. C'est tout autre chose pour le point $\lambda = -1$ correspondant aux problèmes I^- et II^+. Si ce point n'était pas pôle de la résolvante, l'équation intégrale du problème II^+ serait résoluble pour un second membre arbitraire et le problème aux limites serait toujours résoluble, mais ceci contredit le théorème d'existence. Par conséquent, le point $\lambda = -1$ est nécessairement pôle de la résolvante. L'équation du problème II^+ étant associée (et les alternatives de Fredholm réalisées), ici aussi l'équation intégrale ne sera résoluble que pour des conditions aux limites

définies, quoique pour le problème aux limites initial elles ne soient pas nécessaires *).

Il est démontré [73] que le pôle au point $\lambda = -1$ est un pôle simple. Comme on a montré précédemment, six fonctions propres correspondent à ce point.

Les résultats énoncés, comme on peut remarquer, établissent une analogie pratiquement complète entre les propriétés des équations intégrales des problèmes de Dirichlet et de Neumann et des problèmes fondamentaux de l'élasticité.

Esquissons l'algorithme de résolution des équations (2.2), (2.3) et (2.5) par la méthode des approximations successives [116, 96]. Nous allons chercher la solution sous la forme d'une série

$$\varphi(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \varphi_n(q). \tag{2.18}$$

Portant (2.18) dans les équations et égalant les coefficients des mêmes puissances de λ nous obtenons les relations de récurrence

$$\varphi_n(q) = \int_S \Gamma_j(q, q_1)\varphi_{n-1}(q)\, dS_q \tag{2.19}$$

$$(n = 1, 2, \ldots, \quad j = 1, 2, \quad \varphi_0(q) = \boldsymbol{F}(q)).$$

Les propriétés spectrales de la résolvante des équations considérées (cf. § 2, ch. I) permettent d'affirmer que dans le cas des problèmes I^+ et II^- la solution de l'équation intégrale peut être représentée comme **)

$$\varphi(q) = 0{,}5\varphi_0 + 0{,}5(\varphi_0 + \varphi_1) + 0{,}5(\varphi_1 + \varphi_2) + \ldots \tag{2.20}$$

et dans le cas du problème II^+ comme

$$\varphi(q) = \varphi_0 - \varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3 + \ldots \tag{2.21}$$

Le fait est que, quoique le point $\lambda = -1$ soit pôle de la résolvante, la condition (2.9) l'élimine. Il est vrai que l'erreur apparaissant lors de la réalisation numérique peut conduire à la violation des conditions d'orthogonalité, et de ce fait à la divergence de la série. Cette question sera étudiée en détail au § 3.

Comme on a signalé au § 2, ch. I, la réalisation des relations de récurrence (2.3), ch. I, par la méthode des approximations suc-

---

*) Le fait que les conditions de résolubilité de l'équation intégrale et du problème aux limites sont différentes doit être interprété comme le « défaut » de la représentation des déplacements sous forme de potentiel de couche double. Ce potentiel décroit à l'infini comme $1/R^2$, alors que d'après la position du problème les déplacements le sont comme $1/R$.

**) D'autres représentations sont également possibles [43, 59].

cessives pour les équations admettant la valeur propre $\lambda_{\min} = 1$ ou -1 implique la construction de la fonction propre respectivement au point 1 ou -1 si le second membre n'est pas orthogonal aux fonctions propres de l'équation associée. Cette circonstance sera utilisée dans la suite pour résoudre certains problèmes aux limites (pour un coefficient de Poisson voisin de 0,5 par exemple), ainsi que pour estimer l'influence de l'erreur des schémas de calcul sur la convergence de l'algorithme, quand les équations intégrales ont pour solutions les valeurs propres.

Considérons un problème purement hypothétique. Il s'agit d'un problème du type II$^+$ formulé pour des conditions aux limites qui ne sont pas auto-équilibrées (l'une des égalités (2.1) au moins n'est pas remplie). Il est clair que le problème aux limites ne peut admettre de solution. Effectuons néanmoins des approximations successives pour l'équation intégrale qui nous conduirait à une certaine fonction propre $\varphi^*(q)$. La somme $\varphi^N(q) = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \varphi_n(q)$ doit diverger avec l'augmentation de N. On a évidemment la représentation

$$\varphi^N(q) = \Phi(q) + N\varphi^*(q) + \varepsilon^N(q), \qquad (2.22)$$

où $\Phi(q)$ est une fonction indépendante de N, et la fonction $\varepsilon^N(q) \to 0$ lorsque $N \to \infty$.

Ensuite pour un N fixe assez grand nous construisons un potentiel de couche simple de densité $\varphi^N(q)$. La fonction $\varphi^*(q)$ étant une fonction propre, la partie correspondante du potentiel de couche simple donne lieu à des valeurs des contraintes nulles. De ce fait le processus des approximations successives pour des conditions aux limites non auto-équilibrées doit conduire à la solution (convergente en contraintes) d'un certain problème aux limites. Les conditions aux limites de ce problème seront définies par la fonction $\Phi(q)$ et, naturellement, différeront des conditions initiales.

L'étude des problèmes aux limites II$^+$ pour des conditions aux limites non auto-équilibrées peut être d'un certain intérêt. Comme on sait, les problèmes mixtes (cf. § 5) se résolvent parfois par développement en série des conditions aux limites en contraintes (sur la partie de la frontière où sont donnés les déplacements) suivi de la résolution de l'ensemble des problèmes aux limites du type II qui se posent alors. Il n'y a donc aucune nécessité à ce que chaque harmonique conduise à des conditions aux limites globalement auto-équilibrées. Il est clair que lors de la sommation de toutes les solutions particulières (nécessaire pour la réalisation des conditions imposées aux déplacements) l'auto-équilibre de la charge totale doit être pris en compte.

Ces raisonnements peuvent être utilisés pour la résolution du problème I^- à l'aide de l'équation intégrale (2.4) par analogie avec la méthode de résolution du problème extérieur de Dirichlet (cf. § 2, ch. I). A la différence du problème précédent, on aura à construire toutes les six fonctions propres et donc à résoudre 6 problèmes aux limites auxiliaires.

Faisons l'étude des problèmes de la théorie de l'élasticité relatifs à un milieu peu compressible. Notons que si l'on pose dans les équations intégrales (2.2) et (2.3) le coefficient de Poisson égal à 0,5, l'on obtient des équations identiques à celles obtenues dans [100] pour un écoulement linéarisé d'un liquide visqueux incompressible. Il est établi dans le travail cité que ces équations admettent au point —1 (de même que les équations (2.2) et (2.3)) un pôle simple auquel correspondent 6 fonctions propres et, en outre, au point 1 un pôle simple auquel correspond une seule fonction propre. On a établi que pour le problème aux limites II^- cette fonction est une fonction vectorielle dirigée suivant la normale à la surface et ayant en tous les points une même valeur absolue. On tire cette conclusion du fait que pour l'équation conjuguée (correspondant au problème aux limites I^+) la position du problème n'est possible qu'à la condition

$$\int_S \mathbf{F}_1(q)\boldsymbol{\nu}(q)\,dS_q = 0$$

traduisant l'invariance du volume d'un milieu incompressible lors de la déformation. Pour cette raison l'équation conjuguée (pour le problème II^-) ne peut être résolue que pour certaines restrictions sur la condition aux limites, tandis que le problème aux limites lui-même admet une solution dans le cas général.

Comme on a noté plus haut, tous les pôles de la résolvante des équations intégrales singulières de la théorie de l'élasticité, sauf un, sont en module supérieurs à 1. Aussi lorsque σ tend vers 0,5, le second en grandeur pôle de la résolvante tend-il vers 1. Donc on a tout lieu de supposer que pour des σ voisins de 0,5 la convergence des séries (2.20) et (2.21) sera insuffisante.

Nous voyons que seul le cas du problème II^- nécessite d'introduire des corrections dans la solution obtenue par la méthode des approximations successives. Dans le problème I^+ aucune modification n'est nécessaire et dans le problème II^+ il faut utiliser la série

$$\boldsymbol{\varphi} = 0{,}5\boldsymbol{\varphi}_0 + 0{,}5(\boldsymbol{\varphi}_0 - \boldsymbol{\varphi}_1) - 0{,}5(\boldsymbol{\varphi}_1 - \boldsymbol{\varphi}_2) + \ldots \tag{2.23}$$

Dans le problème II^- le calcul des relations de récurrence conduira, comme il a été dit, à la construction d'une fonction propre $C\boldsymbol{\nu}(q)$, plus exactement à la détermination de la constante C. Utilisons

ce fait pour obtenir une représentation convergente de la solution [114]. Considérons le problème aux limites pour lequel on connait la solution exacte $\boldsymbol{u}_1$ en déplacements et en contraintes *). Calculant les relations de récurrence (2.19) nous obtenons une certaine valeur de la constante (désignons-la par C_1). Le problème aux limites pour le déplacement $\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u} - C\boldsymbol{u}_1/C_1$ conduira alors, comme il est aisé de voir, à un processus convergent.

Dans le cas où la convergence des séries (2.20), (2.21) n'est pas suffisante, on peut l'améliorer par des procédés connus (cf. § 2, ch. I).

Considérons maintenant les problèmes où le domaine D est délimité par plusieurs surfaces S_j $(j = 0, 1, \ldots, m)$ disjointes excepté S_0 qui englobe toutes les autres. Remarquons que la surface S_0 peut être absente. Nous envisagerons le deuxième problème fondamental. Nous nous donnons sur chaque surface S_j une fonction vectorielle $\boldsymbol{\varphi}_j(q)$ à déterminer et nous formons un potentiel de couche simple, prenant ces fonctions pour densités. Effectuant alors pour l'opérateur des contraintes le passage à la limite vers les points de la surface, nous obtenons un système d'équations intégrales que nous écrirons symboliquement sous la forme

$$\boldsymbol{\varphi}(q) - \lambda \int_S \boldsymbol{\Gamma}_1(q, q_j)\boldsymbol{\varphi}(q_j)\, dS_{q_j} = \boldsymbol{F}(q) \quad (q, q_j \in S_j). \qquad (2.24)$$

Ici $S = \cup S_j$, $\lambda = -1$. La direction positive de la normale était celle suivant laquelle on sortait du domaine occupé par le milieu élastique.

Il a été remarqué plus haut que toutes les formules de Betti recrutées pour l'analyse spectrale s'avèrent valables dans le cas d'un domaine délimité par plusieurs surfaces, seulement une analyse complémentaire s'impose pour les points $\lambda = \pm 1$.

L'équation intégrale homogène associée à (2.24) est une équation que l'on peut obtenir si l'on construit la solution du premier problème fondamental pour les domaines $D_1^+, D_2^+, D_3^+, \ldots, D_m^+$ sous la forme d'un potentiel élastique généralisé de couche double réparti sur toutes les surfaces **). Les conditions aux limites étant homogènes, tous les déplacements dans les domaines complémentaires seront nuls et par conséquent seront nulles les contraintes aussi. De la continuité du vecteur des contraintes sur

*) On peut procéder de la façon suivante : donner dans l'espace la solution correspondant à la singularité en un certain point du domaine complémentaire (par exemple la solution qui en coordonnées sphériques s'écrit sous la forme $\sigma_r = -1/r^3$, $\sigma_\theta, \sigma_\varphi = 1/2r^3$, $\tau_{r\varphi} = \tau_{r\theta} = \tau_{\theta\varphi} = 0$), et déterminer les contraintes induites par celle-ci sur la surface S.

**) Cette procédure devient inutile si l'on se propose d'obtenir simplement les solutions dans chacun des domaines. On peut alors poser les problèmes et les résoudre indépendamment.

la frontière découlera la nullité des contraintes dans tout le domaine D d'où l'on déduira que les seuls déplacements du corps sont ceux de solide. Mais comme une solution non triviale existe pour des conditions homogènes, l'équation (2.24) s'avère résoluble dans le cas général si sont réalisées les conditions d'orthogonalité (2.9) où par S on doit comprendre l'ensemble des surfaces S_j. Il est évident qu'en présence de la surface S_0 le déplacement de solide du domaine D_0^- est inadmissible, donc l'équation n'admet pas de solutions non triviales, mais est résoluble pour des conditions aux limites arbitraires.

L'équation intégrale (2.24) correspond pour $\lambda = 1$ au deuxième problème fondamental concernant l'ensemble des domaines D_1^+, D_2^+, ..., D_m^+ quand la solution est recherchée sous la forme d'un potentiel unique de couche simple distribué sur toutes les surfaces. Les fonctions propres de l'équation associée correspondent à la solution du premier problème fondamental pour le domaine D. Utilisant le théorème généralisé de Gauss (1.19) il est aisé de montrer que le mouvement de solide de chacune des surfaces S_j $(j \neq 0)$ est une fonction propre. C'est pourquoi à la différence du cas où le domaine est délimité par une seule surface, le point $\lambda = 1$ est pôle de la résolvante.

Ce qui vient d'être dit permet d'affirmer que la résolution de l'équation (2.24) par la méthode des approximations successives dans sa forme (2.18) n'est possible que lorsque la charge appliquée à chacune des surfaces est auto-équilibrée (ce qui conduit à l'annulation du pôle de la résolvante au point $\lambda = 1$), dans le cas contraire (à condition que soient auto-équilibrées toutes les forces du système, la surface S_0 étant présente) on doit utiliser la représentation (2.20).

Considérons un cas particulier. Dans le cas où la surface S est une sphère de rayon R on réussit à résoudre les équations (2.2) et (2.3) sous forme explicite. Le cas le plus simple est celui où la charge est une pression hydrostatique p^+. Les conditions aux limites sont alors les suivantes :

$$T_{\nu_r} u = p^+, \quad T_{\nu_\varphi} = T_{\nu_\theta} = 0. \tag{2.25}$$

La solution de ce problème en déplacements et contraintes est triviale :

$$\begin{gathered} u_r = \frac{1-2\sigma}{E} p^+ r, \quad u_\varphi = u_\theta = 0, \quad \sigma_r = p^+, \\ \sigma_\theta = \sigma_\varphi = p^+, \quad \tau_{r\varphi} = \tau_{r\theta} = \tau_{\theta\varphi} = 0. \end{gathered} \tag{2.26}$$

Les déplacements obtenus représentent un potentiel de couche simple prenant sur la surface la valeur

$$\frac{1-2\sigma}{E} p^+ R = \alpha R \quad \left(\alpha = \frac{1-2\sigma}{E} p^+\right) \tag{2.27}$$

(c'est la valeur de l'unique composante non nulle u_r). Comme ce potentiel de couche simple est une fonction continue dans tout l'espace, pour le déterminer dans le domaine extérieur on doit résoudre le premier problème fondamental pour l'espace à cavité sphérique sur la surface de laquelle est donné le déplacement (2.27). Ce problème peut être résolu de la façon suivante. Supposons que la surface d'une cavité de rayon R est soumise à une pression hydrostatique p^-. La solution est alors de la forme

$$u_r^- = -\frac{1+\sigma}{2E}p^-\frac{R^2}{r}, \quad u_\theta^- = u_\varphi^- = 0. \tag{2.28}$$

Egalant les déplacements $u_r^-|_{r=R}$ à αR, nous obtenons la relation

$$p^- = -2\frac{(1-2\sigma)}{1+\sigma}p^+.$$

Portant celle-ci dans (2.28) nous aboutissons à la représentation du potentiel dans le domaine extérieur.

Ainsi, nous avons obtenu les représentations du potentiel dans les domaines intérieur et extérieur et trouvé les valeurs limites, de l'intérieur et de l'extérieur, de l'opérateur des contraintes $\left(p^+ \text{ et } p^- = \frac{1-2\sigma}{1+\sigma}p^+\right)$. A l'aide de la relation (1.23) nous obtenons la valeur de la densité de ce potentiel, i.e. la solution de l'équation intégrale correspondante sous la forme

$$2\varphi_r = p^- - p^+ = \frac{3(1-\sigma)}{1+\sigma}p^+. \tag{2.29}$$

Ici de même il s'agit de la seule composante normale.

Des raisonnements analogues effectués pour le problème extérieur conduisent à la solution de l'équation intégrale pour ce problème. Nous ne donnons que le résultat :

$$\varphi_r = \frac{3(1-\sigma)}{4(1-2\sigma)}p^-. \tag{2.30}$$

Faisons quelques remarques d'ordre général [75]. Nous avons considéré les questions concernant la résolution des problèmes aux limites fondamentaux de l'élasticité par la méthode du potentiel, obtenu des équations intégrales et établi les conditions de leur résolubilité sous l'hypothèse que la surface frontière est une surface de Liapounov et le second membre est de classe H.-L. Dans ce cas la solution aussi appartient à la classe H.-L.

Pour le problème II la densité du potentiel de couche simple (i.e. la solution de l'équation intégrale) sera de classe $C^{0,\beta}$ et d'après ce qui a été dit au § 1, le potentiel de couche simple sera

une fonction de classe $C^{1,\beta}$, solution régulière (classique) du problème aux limites. Une étude analogue du problème I ne conduit pas à un tel résultat. La densité étant comme auparavant de classe $C^{0,\beta}$, le potentiel de couche double sera une fonction de classe $C^{0,\beta}$ qui n'est pas une solution régulière. Dans ce cas on entendra la solution au sens des distributions.

Remarquons qu'en imposant à la surface et aux conditions aux limites des restrictions complémentaires on peut arriver à une solution classique. En effet, soit $S \in V_2(\alpha)$ et $\boldsymbol{F}(q) \in C^{1,\beta}$. La solution de l'équation intégrale sera alors de classe $C^{1,\beta}$ et le potentiel de couche double représentera, lui, une solution régulière (fonction de classe $C^{1,\beta}$).

Examinons la construction des équations intégrales singulières unidimensionnelles pour le problème plan de l'élasticité [42]*). Rappelons que les équations régulières ont été construites et étudiées au § 3 du chapitre V.

Comme dans le cas spatial, nous utiliserons pour la construction des équations intégrales singulières la solution relative à une force concentrée (dans un plan illimité) que nous représenterons par la matrice $\tilde{\Gamma}(p, q)$, souvent appelée matrice de Boussinesq

$$\tilde{\Gamma}(p, q) = \frac{\lambda+\mu}{2\pi\mu(\lambda+2\mu)} \left\| \begin{matrix} \frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}\ln r - \left(\frac{\partial r}{\partial x_1}\right)^2 & -\frac{\partial r}{\partial x_1}\frac{\partial r}{\partial x_2} \\ -\frac{\partial r}{\partial x_1}\frac{\partial r}{\partial x_2} & \frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}\ln r - \left(\frac{\partial r}{\partial x_2}\right)^2 \end{matrix} \right\|. \tag{2.31}$$

Les éléments de cette matrice peuvent être trouvés en particulier à partir de la solution complexe (4.72), ch. V. S'il s'agit, par exemple, du deuxième problème aux limites, on construit le potentiel de couche simple

$$V(p) = \int_L \tilde{\Gamma}(p, q)\varphi(q)\,dL_q, \tag{2.32}$$

où L est le contour frontière.

L'application de l'opérateur des contraintes (dans le cas de deux dimensions) au potentiel (2.32) et le passage à la limite vers les points du contour conduisent à l'équation intégrale singulière

$$\varphi(q') - \lambda \int_L \tilde{\Gamma}_1(q', q)\varphi(q)\,dL_q = \boldsymbol{F}(q'). \tag{2.33}$$

Pour le problème intérieur, $\lambda = -1$ et la fonction $\boldsymbol{F}(q)$ coïncide avec la condition aux limites; pour le problème extérieur,

*) Dans [42] sont construites et étudiées les équations pour le cas d'oscillations périodiques.

$\lambda = 1$, et la fonction $F(q)$ est de signe contraire de celui de la condition aux limites. Rapportons l'expression des éléments de la matrice $\tilde{\Gamma}_1(q', q) = T_{n(q')}\tilde{\Gamma}(q', q)$:

$$\tilde{\Gamma}_1(q', q) = \begin{Vmatrix} m_1 + n_1\left(\frac{\partial r}{\partial x_1}\right)^2 & n_1\frac{\partial r}{\partial x_1}\frac{\partial r}{\partial x_2} \\ n_1\frac{\partial r}{\partial x_1}\frac{\partial r}{\partial x_2} & m_1 + n_1\left(\frac{\partial r}{\partial x_2}\right)^2 \end{Vmatrix} \frac{d}{dn(q')}\ln r + \\ + m_1\begin{Vmatrix} 0 & \omega(q', q) \\ \omega(q', q) & 0 \end{Vmatrix}\ln r. \qquad (2.34)$$

Ici

$$m_1 = \frac{\mu}{\pi(\lambda + 2\mu)}, \quad n_1 = \frac{2(\lambda + \mu)}{\pi(\lambda + 2\mu)},$$

$$\omega(q', q) = \frac{\partial}{\partial x_2}\cos(n_{q'}, x_1) - \frac{\partial}{\partial x_1}\cos(n_{q'}, x_2).$$

Comme dans le cas spatial, les éléments de la matrice (2.34) sont doublés.

On observe une analogie presque complète avec les équations intégrales des problèmes spatiaux. Pourtant certaines questions sont étudiées plus exhaustivement et à l'aide d'un autre appareil. L'applicabilité des alternatives de Fredholm est étayée par des résultats bien connus de la théorie des systèmes d'équations singulières unidimensionnelles [158]. Des calculs immédiats ont montré que l'indice du système (2.33) s'annule. Notons que la condition d'existence d'une solution régulière du problème II^- plan est la nullité du vecteur des efforts résultant.

Signalons l'existence d'équations intégrales (régulières et singulières) pour les problèmes à symétrie axiale de la théorie de l'élasticité [51, 118, 106, 2].

Considérons aussi l'application en théorie de l'élasticité de la matrice (tenseur) de Green. Soit p un point du domaine D et $\Gamma(p, q)$ la solution de Kelvin-Somigliana qui lui correspond. Soit $U(p, q)$ une matrice dont chaque colonne vérifie les équations de Lamé (suivant les coordonnées du point q), le point p figurant dans les éléments de cette matrice comme paramètre. On peut alors montrer (répétant effectivement tous les raisonnements qui ont conduit à la formule (1.12)) qu'a lieu l'égalité

$$u(p) = \int_S G(p, q)T_\nu u(q)\, dS_q - \int_T T_\nu G(p, q)u(q)\, dS_q, \qquad (2.35)$$

où

$$G(p, q) = \Gamma(p, q) - U(p, q).$$

Exigeant en outre qu'aux points de la surface on ait

$$G(p, q) = 0,$$

alors $U(p, q) = \Gamma(p, q)$ $(q \in S)$, et on obtient la matrice de Green pour le premier problème fondamental de l'élasticité. Dans ce cas la représentation (2.35) se simplifie et prend la forme

$$u(p) = -\int_S T_\nu G(p, q) u(q)\, dS_q \qquad (2.35')$$

qui est effectivement la représentation explicite de la solution du premier problème fondamental. L'existence de la matrice $U(p, q)$ découle de l'existence de la solution du premier problème fondamental. Par conséquent, la matrice de Green existe aussi.

La matrice de Green permet d'obtenir d'autre part la représentation des déplacements vérifiant les équations de Lamé non homogènes $(\Delta^* u = f(q))$:

$$u(p) = -\int_S T_\nu G(p, q) u(q)\, dS_q + \int_D G(p, q) f(q)\, d\Omega. \qquad (2.36)$$

La construction de la matrice de Green pour le deuxième problème fondamental est liée à certaine complication (analogue à celle de la fonction de Green du problème de Neumann (cf. § 7, ch. I)). Le fait est que dans le cas d'un domaine D fini il est impossible de choisir une matrice $U(p, q)$ telle que l'opérateur des contraintes des déplacements définis par la matrice $G(p, q)$ s'annule sur la surface S.

On réussit à appliquer l'appareil des fonctions de Green à l'analyse des problèmes de la théorie des oscillations. L'équation pour les amplitudes des déplacements

$$\Delta^* u = -k^2 u \qquad (2.37)$$

permet de représenter ceux-ci par la matrice de Green :

$$u(p) = -\int_S T_\nu G(p, q) u(q)\, dS_q + k^2 \int_D G(p, q) u(q)\, d\Omega. \qquad (2.38)$$

Pour des conditions aux limites homogènes nous obtenons donc une équation intégrale symétrique :

$$u(p) = k^2 \int_D G(p, q) u(q)\, d\Omega. \qquad (2.39)$$

On montre [74] que le noyau est de carré intégrable. Ceci étant, la théorie des équations intégrales de Fredholm symétriques nous conduit à la démonstration de l'existence (pour un domaine fini) d'un spectre discret de valeurs propres (autrement dit de fréquences d'oscillations propres) qui sont des nombres réels et, de plus, positifs *).

Il en est de même pour le deuxième problème fondamental.

Pour l'étude des problèmes aux limites on construit maintenant, à l'aide de potentiels de couches double et simple (à partir de la matrice (1.33)), des équations intégrales singulières. Les alternatives de Fredholm s'étendent automatiquement à ces équations, celles-ci ne différant des équations de statique que par des termes réguliers. La complication est due à ce que, pour certaines valeurs de la fréquence k^2 des oscillations propres, les solutions des problèmes homogènes ne sont pas uniques.

Attirons l'attention sur un fait intéressant dû à la correspondance qui existe entre les équations intégrales des problèmes I^+ et II^-. Soit k^2 la fréquence des oscillations propres. Quoique l'équation intégrale du problème I^+ admette une solution non triviale, la résolubilité du problème aux limites entraîne la vérification des conditions d'orthogonalité. L'équation intégrale du problème II^- étant associée à celle du problème I^+, le nombre k^2 appartient également au spectre de valeurs propres, mais les conditions d'orthogonalité ne sont pas dans ce cas vérifiées, ce qui conduit à la non-résolubilité de l'équation. Il est alors nécessaire de modifier la représentation des amplitudes en y introduisant certains termes [75].

§ 3. Méthodes de réalisation numérique

Les méthodes numériques de résolution des équations intégrales se basent en premier lieu sur la possibilité de calculer les intégrales figurant dans les équations. Indépendamment de la façon dont on résout celles-ci, que ce soit par la méthode des approximations successives (quand à chaque étape est connue toute l'expression sous l'intégrale) ou par la méthode des quadratures mécaniques (quand la fonction cherchée est supposée constante à l'intérieur d'un petit domaine, ce qui permet de la mettre en facteur devant le signe de l'intégrale), on en vient toujours à calculer l'intégrale d'une expression connue.

---

*) Pour la démonstration de cette dernière affirmation on fera recours aux identités de Betti (en analogie complète avec le cas de l'équation de Helmholtz; cf. § 7, ch. I).

Les intégrales figurant dans les équations (2.2), (2.3) et (2.5) sont des intégrales singulières bidimensionnelles. Conformément à la théorie générale (§ 3, ch. I) il conviendrait pour leur calcul d'introduire chaque fois un système de coordonnées local qui se définit par l'intersection de la surface en question avec les surfaces de coordonnées r = const, φ = const d'un repère cylindrique dont l'axe z est dirigé suivant la normale à la surface au point où l'on calcule l'intégrale. Ce procédé est lié à de sérieuses difficultés techniques qui accroissent avec le nombre de points en lesquels il y a lieu de calculer les intégrales singulières. La prise en compte de la spécificité des noyaux des intégrales considérées a permis cependant d'éviter les difficultés signalées. L'un des procédés [109] consiste à transformer ces intégrales singulières en intégrales impropres (régulières); l'autre [1, 20] se base sur la possibilité de calculer sous forme explicite l'intégrale du noyau quand l'élément de surface est un polygone plan.

Considérons tout d'abord le premier procédé. Pour les intégrales figurant dans les équations (2.2), (2.3) et (2.5) on a les identités

$$\int_S \Gamma_2(q_1, q)\varphi(q)\,dS_q = -\varphi(q_1) + \int_S \Gamma_2(q_1, q)[\varphi(q) - \varphi(q_1)]\,dS_q, \quad (3.1)$$

$$\int_S \Gamma_1(q_1, q)\varphi(q)\,dS_q =$$

$$= -\varphi(q_1) + \int_S [\Gamma_1(q_1, q)\varphi(q) - \Gamma_2(q_1, q)\varphi(q_1)]\,dS_q, \quad (3.2)$$

appelées les *représentations régulières*.

Si les fonctions $\varphi(q)$ sont supposées de classe H.-L., les intégrales figurant aux seconds membres sont évidemment des intégrales impropres, de sorte que pour leur calcul on peut utiliser telles ou telles formules d'intégration connues.

Considérons le cas où la surface S n'est pas fermée *) [66]. Afin de donner aux intégrales singulières considérées une représentation régulière (aux points intérieurs de la surface S) il faut d'une façon quelconque compléter la surface S pour obtenir une surface fermée S_2 ($S_2 = S \cup S_1$) posant sur S_1 la densité nulle.

---

*) Ce cas présente de l'intérêt dans les problèmes où la configuration du corps et la nature des conditions aux limites sont telles que l'on peut supposer la densité $\varphi(q)$ nulle sur une certaine partie de la surface frontière. Des problèmes mixtes amènent eux aussi au calcul des intégrales suivant des surfaces non fermées (cf. § 5).

On aura alors les représentations régulières suivantes :

$$\int_S \Gamma_2(q_1, q)\varphi(q)\,dS_q = -\varphi(q_1) +$$

$$+ \int_S \Gamma_2(q_1, q)[\varphi(q) - \varphi(q_1)]\,dS_q - \int_{S_1} \Gamma_2(q_1, q)\,dS_q\varphi(q_1), \quad (3.1')$$

$$\int_S \Gamma_1(q_1, q)\varphi(q)\,dS_q = -\varphi(q_1) +$$

$$+ \int_S [\Gamma_1(q_1, q)\varphi(q) - \Gamma_2(q_1, q)\varphi(q_1)]\,dS - \int_{S_1} \Gamma_2(q_1, q)\,dS_q\varphi(q_1). \quad (3.2')$$

Lorsque S est une partie du plan [83], les formules (3.1′) et (3.2′) se simplifient pour devenir

$$\int_S \Gamma_2(q_1, q)\varphi(q)\,dS_q = \int_S \Gamma_2(q_1, q)[\varphi(q) - \varphi(q_1)]\,dS_q, \quad (3.1'')$$

$$\int_S \Gamma_1(q_1, q)\varphi(q)\,dS_q = \int_S [\Gamma_1(q_1, q)\varphi(q) - \Gamma_2(q_1, q)\varphi(q_1)]\,dS_q. \quad (3.2'')$$

Les représentations régulières (3.1) et (3.2) permettent de calculer les intégrales singulières figurant dans les équations de la théorie de l'élasticité par les formules d'intégration applicables usuellement aux intégrales impropres. Avec la méthode des approximations successives, les relations de récurrence (2.19) deviennent

$$\varphi_n(q_2) = -\varphi_{n-1}(q_1) + \int_S \Gamma_2(q_1, q)[\varphi_{n-1}(q) - \varphi_{n-1}(q_1)]\,dS_q, \quad (3.3)$$

$$\varphi_n(q_1) = -\varphi_{n-1}(q_1) + \int_S [\Gamma_1(q_1, q)\varphi_{n-1}(q) - \Gamma_2(q_1, q)\varphi_{n-1}(q_1)]\,dS_q. \quad (3.4)$$

On décrit dans [1, 20] des procédés de calcul direct des intégrales singulières considérées. Dans [20] est obtenue l'expression d'une intégrale singulière dont le domaine d'intégration est un polygone plan et la densité constante. La valeur de l'intégrale se représente alors par des fonctions élémentaires. Ce résultat s'explique par le fait que le domaine « découpé » (conformément à la définition de l'intégrale singulière) est un disque.

Dans [1], la formule d'intégration est construite sur un autre principe quoiqu'avec les mêmes restrictions. On passe au schéma de calcul à partir de l'expression même du potentiel de couche simple. Comme pour des restrictions mentionnées il se calcule au moyen de fonctions élémentaires, les valeurs correspondantes des contraintes dans tout l'espace, y compris leurs valeurs limites des différents côtés de la surface frontière, s'expriment par des fonctions élémentaires.

Il est clair que la résolution des équations intégrales par la méthode d'intégration mécanique ou par la méthode des approximations successives exigera une discrétisation de toute la surface frontière S, i.e. sa partition en petits domaines (élémentaires) S_j $(j = 1, 2, \ldots, N)$.

Donnons-nous dans chaque domaine un point q_j que nous appellerons *point d'appui*. On peut choisir ces points de façon arbitraire, mais il est rationnel de les situer dans la partie centrale. Faisons intervenir également des points dits *points nodaux* q_j^k, sommets des domaines élémentaires $(k = 1, 2, \ldots, N_j)$.

Nous exigerons la vérification de ces analogues discrets des équations intégrales aux points d'appui. Nous obtenons de la sorte des systèmes d'équations algébriques linéaires avec la méthode d'intégration mécanique, tandis que la méthode des approximations successives nous conduira à l'application succesive des formules d'intégration.

Ces procédés permettent de résoudre numériquement les équations intégrales singulières de la théorie de l'élasticité.

Décrivons la réalisation de la méthode des approximations successives à l'aide de représentations régulières. Le schéma le plus simple est celui où chaque terme de la somme intégrale représente le produit de la fonction sous l'intégrale au point d'appui par la surface du domaine élémentaire. Ne sont pas gardés dans la somme les termes au dénominateur nul. Les relations (3.2) s'écrivent alors

$$\varphi_n(q_j) = -\varphi_{n-1}(q_j) + \\ + \sum_{i \neq j}^{N} [\Gamma_1(q_j, q_i)\varphi_{n-1}(q_i) - \Gamma_2(q_j, q_i)\varphi_{n-1}(q_j)]\Delta S_i. \quad (3.5)$$

Un schéma de calcul plus exact sera obtenu si l'on part de la représentation de chaque terme de la somme intégrale sous forme du produit de la valeur moyenne (sur les points nodaux) de l'expression sous l'intégrale par la surface du domaine élémentaire supposant la fonction $\varphi_{n-1}(q)$ constante à l'intérieur de chaque domaine élémentaire. On a

$$\varphi_n(q_j) = -\varphi_{n-1}(q_j) + \sum_{i=1}^{N} \frac{\Delta S_i}{N_i} \sum_{k=1}^{N_i} [\Gamma_1(q_j, q_i^k)\varphi_{n-1}(q_i) - \Gamma_2(q_j, q_i^k)\varphi_{n-1}(q_j)]. \quad (3.6)$$

Afin de prendre en compte la variation de la fonction $\varphi_{n-1}(q)$ dans son domaine élémentaire, les valeurs aux points nodaux peuvent être déterminées par extrapolation. Dans ce cas nous obtenons la formule d'intégration [110]

$$\varphi_n(q_j) = -\varphi_{n-1}(q_j) + \sum_{i=1}^{N} \frac{\Delta S_i}{N_i} \sum_{k=1}^{N_i} [\Gamma_1(q_j, q_i^k)\varphi_{n-1}(q_i^k) - \Gamma_2(q_j, q_i^k)\varphi_{n-1}(q_j)]. \quad (3.7)$$

Notons que les formules d'intégration des intégrales singulières élaborées dans les travaux [21, 77] développant l'approche décrite dans [20] le sont sous l'hypothèse que la densité varie dans les limites du domaine élémentaire. Ces formules sont naturellement beaucoup plus volumineuses.

Nous avons présenté ci-dessus les formules d'intégration les plus simples. Il est clair que l'application de ces formules à la résolution des problèmes assez complexes de la théorie de l'élasticité est liée à des calculs fastidieux. Aussi serait-il intéressant d'envisager des schémas plus économiques. Notons tout de suite que l'efficacité des schémas de calcul n'est pas définie uniquement par le degré de précision atteint, mais aussi par la simplicité de programmation sur ordinateur et la facilité de leur mise au point.

Passons à l'exposé des procédés de construction des schémas de calcul, basés sur les formules d'intégration élémentaires (3.5)-(3.7), qui ont permis de réduire notablement le volume des calculs. Dans [149] on propose d'effectuer les calculs par les formules d'intégration rien qu'en une partie des points d'appui, déterminant les valeurs dans les autres points par interpolation. Au fait il s'agit d'un maillage assez grossier pour l'approximation de la densité du potentiel et d'un maillage plus fin pour le calcul des intégrales mêmes.

Dans [16] les calculs sont effectués en utilisant un maillage à pas variable. Le calcul des fonctions $\varphi_n(q)$ en un point concret se fait à l'aide d'une discrétisation unique de toute la surface et d'une discrétisation locale naturellement plus fine, au voisinage du

point donné. On a aussi à déterminer les densités dans les domaines élémentaires qui apparaissent par suite d'une discrétisation fine, ce qu'on fait également par interpolation.

Une idée, au fond proche, est réalisée d'une autre manière dans [111]. On propose de déterminer chaque terme de la somme intégrale de différentes façons en fonction de la distance entre le point auquel l'intégrale se calcule et le domaine élémentaire définissant le terme. Lorsque les distances sont importantes, on peut se servir de la formule élémentaire selon laquelle la valeur de l'expression sous l'intégrale au point d'appui est multipliée par la surface du domaine. Dans le cas de distances petites on propose d'utiliser les formules d'intégration de Gauss dont l'ordre augmente avec la diminution de la distance. Les valeurs de la densité nécessaires pour la réalisation des formules de Gauss aux points internes des domaines élémentaires sont trouvées par interpolation. Dans le travail cité on présente des recommandations sur le choix de l'ordre des formules de Gauss en fonction de la distance. Ces recommandations sont établies sur la base des calculs effectués pour un domaine plan divisé en petits carrés. Il est clair que pour une discrétisation assez fine (par rapport au rayon de courbure de la surface) les recommandations peuvent être étendues au cas de surfaces arbitraires.

Dans le même travail [111] on expose des considérations permettant d'automatiser la préparation de l'information pour une classe large de surfaces et de conditions aux limites. Il est proposé de diviser la surface en quadrilatères assez grands, en général curvilignes. Moyennant un repère curviligne u, v on applique chacun d'eux sur un carré de côté 2 et de centre à l'origine des coordonnées. On peut introduire un tel repère à l'aide d'une fonction dite *fonction de forme du deuxième ordre.*

Supposons que les sommets du quadrilatère x_1, x_2, x_3 et x_4 ont pour images les sommets d'un carré (i.e. les points de coordonnées $u_1 = 1$, $v_1 = -1$, $u_2 = 1$, $v_2 = 1$, etc.) ; le point x_5 (sur le côté x_1x_2) ayant pour image le point $u_5 = 1$, $v_5 = 0$; le point x_6 (sur le côté x_3x_4), le point $u_6 = -1$, $v_6 = 0$; le point x_7 (sur le côté x_2x_3), le point $u_7 = 0$, $v_7 = 0$; le point x_8 (sur le côté x_4x_1), le point $u_8 = 0$, $v_8 = -1$.

On appelle fonctions de forme du deuxième ordre les fonctions

$$N_i(u, v) = \frac{1}{4}(1 + uu_i)(1 + vv_i)(uu_i + vv_i - 1) \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

$$N_i(u, v) = \frac{1}{2}(1 - v^2)(1 + uu_i) \quad (i = 5, 6),$$

$$N_i(u, v) = \frac{1}{2}(1 - u^2)(1 + vv_i) \quad (i = 7, 8).$$

Dans ce cas pour la surface du quadrilatère initial nous obtenons la représentation

$$\boldsymbol{x}(u, v) = \sum_{i=1}^{8} N_i(u, v)\boldsymbol{x}_i. \tag{3.8}$$

Les fonctions de forme du deuxième ordre conduisent à la construction d'une surface continue si sur les côtés communs à deux quadrilatères on prend les mêmes points. Pour construire une représentation régulière de la surface il faut faire appel à des fonctions de forme d'ordre plus élevé.

La discrétisation de chacun des grands quadrilatères est effectuée en donnant sur les côtés correspondants du carré (dans le plan u, v) quelques points par lesquels sont menées des droites parallèles aux côtés.

Il est clair que la partition de la surface en grands quadrilatères et la partition de ceux-ci à leur tour en petits (leur nombre et dimensions) sont suggérées aussi bien par la forme de la surface initiale que par le caractère de variation de la densité recherchée du potentiel. Tout d'abord il faut que la représentation (3.8) approche de façon satisfaisante la surface et ensuite que les domaines où l'on s'attend à une variation brusque de la densité et qui exigent par suite une discrétisation locale fine soient pris à l'intérieur de quadrilatères à part lors d'une première discrétisation. Dans le cas contraire, à cause de la structure de l'algorithme assurant l'automatisation de la subdivision, apparaît la nécessité d'introduire sur les domaines attenants une discrétisation trop fine, ce qui conduit à une réduction de l'efficacité du schéma de calcul.

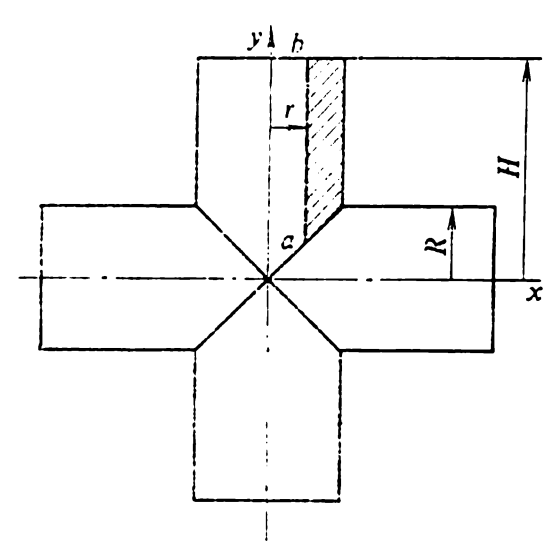


Fig. 69. Croisement de deux cylindres creux.

L'algorithme que nous venons de décrire a été appliqué à la résolution (moyennant un programme unifié) du problème spatial suivant. Le corps élastique représentait l'intersection de deux cylindres creux identiques (fig. 69), avec $H/r = 6$, $R/r = 2$ et le coefficient de Poisson égal à 0,3. Le char-

gement se ramenait à une pression hydrostatique de valeur unité s'exerçant sur la surface intérieure. La symétrie par rapport aux trois plans permettait de n'effectuer le calcul des itérations que sur $^1/_{16}$ partie de la surface (avec des corrections nécessaires sur le calcul des fonctions $\varphi_n(q)$ sur la partie restante de la surface, car certaines de leurs composantes changeaient de signe). Sur la figure 70 sont montrés les trois quadrilatères en lesquels était découpée la partie considérée de la surface; on y a indiqué également la position des points qui ont été utilisés pour la construction de fonctions de forme. La surface intérieure était divisée en 14 × 8 parties, la surface extérieure en 6 × 6 parties et la face en 6 × 4 parties. 7 itérations ont été exécutées. Sur la figure 71 sont portées les valeurs des contraintes sur la droite *ab*. Les calculs ont montré qu'à une distance $y > 3r$ de l'endroit de jonction la solution devient une solution de Lamé.

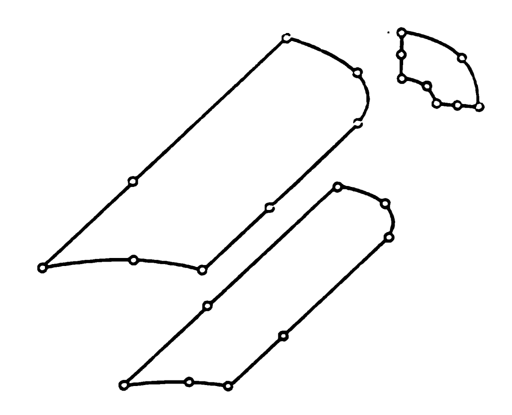


Fig. 70. Partition des surfaces en quadrilatères principaux.

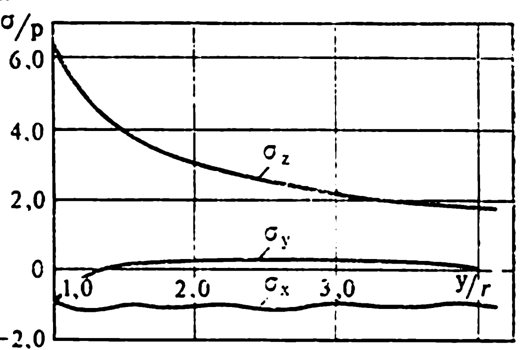


Fig. 71. Epures des contraintes.

Faisons la comparaison de la méthode d'intégration mécanique avec la méthode des approximations successives. La réalisation de la première conduit à un système d'ordre $3N$ (où N est le nombre des domaines élémentaires). Aussi pour placer dans l'ordinateur les éléments de la matrice on aura besoin d'un volume important de mémoire opérationnelle ($9N^2$). Un autre inconvénient est que les problèmes II^+ conduisent à des systèmes dégénérés nécessitant l'application de méthodes spéciales.

La méthode des approximations successives est préférable. Premièrement, la convergence du processus itératif pour une réalisation exacte entraîne qu'une réalisation approchée conduit à

une solution exacte, puisque pour tel ou tel nombre fini de termes de la série le problème se ramène au calcul d'un nombre fini d'intégrales, ce qui peut être effectué avec une précision voulue *). Deuxièmement, la réalisation même de la méthode exige de garder dans la mémoire opérationnelle rien que deux itérations (i.e. $6N$ nombres).

Signalons encore une circonstance à l'avantage de la méthode des approximations successives. De nombreux calculs ont montré (et ceci est en accord avec les résultats de la théorie de la résolvante) qu'à partir d'un certain n les fonctions $\varphi_n(q)$ se conduisent comme les termes d'une progression géométrique de même raison (définie par la position du second pôle de la résolvante). Aussi peut-on, en présence d'une convergence lente, établir la vraie valeur de la raison pour effectuer ensuite une sommation analytique.

Passons aux problèmes à symétrie axiale dans le cas spatial. Il est naturel d'effectuer une discrétisation de la surface par un réseau de parallèles et de méridiens. Il est évident que le vecteur $\varphi(q)$ est constant sur chaque parallèle si on l'exprime dans un repère cylindrique (en projections φ_ρ et φ_z). En coordonnées cartésiennes utilisées dans les équations considérées on a les relations

$$\varphi_x = \varphi_\rho \cos \varphi, \quad \varphi_y = \varphi_\rho \sin \varphi, \quad \varphi_z = \varphi_z$$

qu'il convient d'utiliser dans les relations de récurrence (2.19). La procédure de calcul doit être organisée de façon que les sommes de Darboux soient calculées le long de chaque parallèle. Il est utile dans ce cas de sommer numériquement [149] ou analytiquement [58] les combinaisons correspondantes des expressions sous intégrales (multipliées dans les formules définitives par cos φ et sin φ). Le volume de l'information nécessaire pour conduire le processus itératif s'avérera alors assez compact et pourra être inscrit dans la mémoire opérationnelle de l'ordinateur. Par conséquent, la réalisation de chaque itération suivante exigera peu de temps en comparaison de la première itération. Il est clair que tous les calculs des densités sont à effectuer de même dans les points d'un seul méridien (initial).

Notons que si l'on effectue l'intégration numérique suivant l'angle de rotation, il faut introduire une discrétisation suivant l'angle. Afin d'éviter les complications liées à l'apparition de toutes les fonctions propres, la discrétisation suivant l'angle doit avoir deux plans de symétrie.

Arrêtons-nous sur l'influence de l'erreur des formules d'intégration sur la convergence de l'algorithme. Il est évident que

*) La question de l'influence des erreurs de calcul n'est pas considérée ici.

dans le cas des problèmes I^+ et II^- cette erreur (si elle est suffisamment petite) n'aura aucune influence sur la convergence (si l'on se sert bien entendu des formules (2.31′)), mais conduira à une certaine erreur sur la solution (analogue à celle qui apparaît avec des séries tronquées). L'erreur admissible du schéma de calcul (garantissant la convergence) peut être estimée à l'aide de la valeur modifiée en conséquence du paramètre λ (à condition de supposer qu'il n'y a pas d'autres erreurs) : la valeur λ ne doit pas dépasser en valeur absolue le second en grandeur pôle de la résolvante.

Dans le cas du problème I^- (supposant connues les fonctions propres de l'équation associée et la condition d'existence de la solution vérifiée pour une condition aux limites donnée) et du problème II^+ il convient de se servir des recommandations exposées au § 2 du chapitre I. Le premier procédé consiste à considérer la série (2.18) comme asymptotique, en refusant de réaliser un nombre d'itérations arbitrairement grand pour une discrétisation fixée de la surface. Le second procédé consiste à corriger chaque itération (en réalisant une projection orthogonale sur le sous-espace des fonctions vérifiant la condition d'orthogonalité). Les formules (2.32′), ch. I, se ramènent dans ce cas à la forme :

$$\tilde{\varphi}_n(q) = \varphi_n(q) - \sum_{i=1}^{6} \varphi_{1i}(q) \int_S \varphi_{1i}(q_1)\, \varphi_n(q_1)\, dS_{q_1}, \qquad (3.9)$$

où φ_{1i} sont les fonctions propres orthonormées des équations associées. Pour construire les fonctions on peut partir du système orthogonal suivant de fonctions linéaires :

$$\varphi_{11}^* = (1, 0, 0), \quad \varphi_{12}^* = (0, 1, 0), \quad \varphi_{13}^* = (0, 0, 1),$$

$$\varphi_{14}^* = (x_3, 0, -x_1), \quad \varphi_{15}^* = (-x_2, x_1, 0), \quad \varphi_{16}^* = (0, -x_3, x_2).$$

Leur normalisation ne présente pas de difficultés.

Dans le cas de symétrie axiale (si la discrétisation suivant l'angle admet aussi deux plans de symétrie) la formule (3.9) se simplifie et prend la forme

$$\tilde{\varphi}_n(q) = \varphi_n(q) - \mathbf{v}' \int_S \mathbf{v}' \varphi_n(q_1)\, dS_{q_1}, \qquad (3.10)$$

où le vecteur $\mathbf{v}'$ est dirigé suivant l'axe de rotation et égal en grandeur à $1/\sqrt{S}$ (S est l'aire de la surface).

Examinons notre problème d'autres positions. Comme on a noté au § 2, le processus des approximations successives appliqué à l'équation du problème II^+ conduit à la construction d'une fonction propre. Pour la somme finie des termes de la série on

obtient l'expression (2.22), d'où l'on déduit que le processus fournit une solution, convergente en contraintes, du problème aux limites. Ceci concerne, bien entendu, une charge non équilibrée.

Dans notre cas la charge doit être auto-équilibrée d'après la position du problème, mais à cause de l'erreur des schémas de calcul (sauf lorsqu'on a trois plans de symétrie de charges et géométrique) la solution n'est pas convergente. Il est logique d'interpréter cette erreur comme une erreur introduite au préalable dans les conditions aux limites (et violant les conditions d'auto-équilibre) et de procéder ensuite à une réalisation exacte de l'algorithme. On peut donc affirmer qu'a lieu la convergence de l'algorithme en contraintes, seule exigée d'après la position du problème. Il est clair que plus fine est la discrétisation et plus proche est la solution de la solution exacte.

Illustrons les considérations que nous venons d'exposer sur l'exemple d'un problème à symétrie axiale relatif à un cylindre à bouts bombés. Le chargement se ramenait à des contraintes tangentielles s'exerçant sur deux bandes de surface cylindrique, l'une étant deux fois plus large que l'autre. Sur chaque bande la charge était distribuée suivant une loi linéaire, croissant du zéro au maximum, puis décroissant à zéro. La contrainte maximale au centre de la bande large était égale à l'unité et celle de la bande étroite, à moins deux. 70 points d'appui étaient introduits sur le contour de la section droite, la plupart situés sur les secteurs d'application de la charge. Les calculs ont été effectués pour trois discrétisations différant par la quantité de points d'appui au voisinage du milieu de la bande étroite (où les contraintes tangentielles sont maximales).

Le calcul I a été effectué avec le plus petit nombre de points d'appui, le calcul II, avec 4 points de plus et le calcul III, avec encore 2 points. Le tableau 4 présente les valeurs de la z-ième composante des fonctions $\varphi_n(q)$ (z est l'axe de rotation) en l'un des points d'appui pris sur la bande étroite pour les valeurs indiquées de n, les sommes correspondantes $\varphi^N(q)$, ainsi que les valeurs de la composante σ_z en l'un des points internes du corps situé au voisinage de la zone de chargement. Tous les calculs ont été effectués d'après la formule d'intégration (3.7) (en tenant compte de la symétrie axiale).

Il apparaît de ces données que pour un nombre fixe d'itérations on observe avec l'élévation de la précision du schéma de calcul (passage du schéma I au schéma III) la convergence des sommes pour la densité, ce qui conduit à celle des sommes pour les contraintes. Si au contraire on se fixe une discrétisation, on constate qu'à partir d'un certain numéro (augmentant avec la précision du schéma de calcul) il y a non seulement divergence

de la somme des itérations, mais aussi accroissement de celles-ci. La convergence en contraintes a néanmoins lieu.

Tableau 4

	φ_4	φ_6	φ_7	φ_8	φ_{14}	φ_{15}
I	7,9-04	−5,1-03	−7,0-03	7,9-03	1,6-02	−1,7-02
II	−3,2-03	−7,9-04	−1,7-03	2,0-03	3,9-03	−4,3-03
III	−4,1-03	2,4-04	−3,5-04	4,5-04	9,6-04	−1,1-03
	φ^5	φ^8	φ^{15}	σ_z^5	σ_z^8	σ_z^{15}
I	−8,58-01	−8,38-01	−7,48-01	−1,918-01	−1,925-01	−1,927-01
II	−8,78-01	−8,73-01	−8,51-01	−2,060-01	−2,067-01	−2,068-01
III	−8,82-01	−8,82-01	−8,76-01	−2,095-01	−2,1027-01	−2,1039-01

Des calculs analogues mais utilisant une correction conformément à la formule (3.10) ont été également effectués. Les résultats sont présentés dans le tableau 5.

Tableau 5

	φ_4	φ_5	φ_7	φ_9	φ_{14}	φ_{15}
I	−4,2-04	5,4-04	6,6-05	−3,4-05	−2,3-07	1,15-07
II	−4,6-03	6,1-04	7,8-05	−4,0-05	−2,5-07	1,25-07
III	−4,5-03	6,3-04	8,0-05	−4,0-05	−2,5-07	1,27-07
	φ^5	φ^8	φ^{15}	σ_z^5	σ_z^8	σ_z^{15}
I	−8,82-01	−8,8231-01	−8,8233-01	−1,918-01	−1,9247-01	−1,926-01
II	−8,84-01	−8,8467-01	−8,8469-01	−2,059-01	−2,0670-01	−2,068-01
III	−8,84-01	−8,844-01	−8,8455-01	−2,059-01	−2,1027-01	−2,104-01

Ici déjà apparait nettement la convergence vers zéro de toutes les fonctions $\varphi_n(q)$, la convergence des sommes et, naturellement, la convergence en contraintes. Notons que les valeurs des contraintes obtenues suivant les deux méthodes (sans et avec la correction par la formule (3.10)) s'avèrent pratiquement égales pour des discrétisations identiques.

Le corps considéré avait un plan de symétrie. On s'attend donc à ce que la fonction propre soit symétrique par rapport à ce plan (le problème étant à symétrie axiale, les cinq autres fonctions propres s'annulent). On affirmait plus haut qu'à cause de l'erreur des calculs, le processus itératif doit conduire à la construction d'une fonction propre. Aussi était-il naturel de s'attendre à ce que les fonctions $\varphi_n(q)$ admettent (à partir de numéros suffisamment

grands) une symétrie du type indiqué. Les calculs effectués ont entièrement confirmé cette hypothèse. Ce fait peut être utilisé pour estimer la précision de la solution des problèmes aux limites quand la symétrie n'est que géométrique.

Arrêtons-nous sur la question de calcul des contraintes et des déplacements après la résolution de l'équation intégrale. Plus précisément, il s'agit du calcul des contraintes aux points de la surface frontière, puisque le calcul des déplacements et des contraintes aux points intérieurs du domaine se ramène au calcul d'intégrales à noyaux analytiques et le calcul des déplacements aux points de la surface, au calcul d'intégrales impropres *) qui peut être effectué par des méthodes connues. Il faut, il est vrai, pour les calculs effectués aux points proches de la frontière, introduire une seconde discrétisation de la surface dans le voisinage du point considéré. La densité utilisée dans les calculs doit alors être trouvée par interpolation à partir de la solution de l'équation intégrale. Les contraintes et les déplacements sont déterminés avec un degré de précision suffisant (dépendant de la précision de la solution de l'équation intégrale) si pour une deuxième subdivision (toujours plus fine) les valeurs trouvées restent sensiblement les mêmes.

En général, après avoir déterminé les déplacements en quelques points de la surface frontière, suffisamment voisins l'un de l'autre, et calculé les déformations selon les valeurs connues du vecteur des contraintes (donné d'après la position du problème), on peut déterminer les autres composantes du tenseur des contraintes.

Décrivons un autre procédé, dont l'avantage est de ne pas exiger pour sa réalisation l'introduction de blocs complémentaires dans le programme utilisé pour l'équation intégrale. Considérons au voisinage du point donné de la surface quelques points (situés pour plus de simplicité sur la normale à la surface) et calculons en ceux-ci toutes les composantes du tenseur des contraintes. On peut utiliser pour cela le bloc du programme principal servant à calculer l'intégrale

$$\int_S \Gamma_1(q_1, q)\,\varphi(q)\,dS_q.$$

On fait les calculs pour trois directions de la normale. Puis, répétant les calculs pour une discrétisation plus fine on cherchera à obtenir des valeurs stables des contraintes et,

*) Si l'on utilise l'équation intégrale (2.5), les déplacements sur la surface sont tirés de la solution de l'équation intégrale.

enfin, on effectuera une extrapolation quelconque (polynomiale, par exemple) au point donné de la frontière.

Remarquons que le plus difficile est de déterminer, par cette méthode, les composantes figurant aux conditions aux limites*). Aussi, une fois qu'on a trouvé celles-ci avec une bonne précision, on peut être sûr que les autres composantes seront aussi obtenues avec une précision suffisante.

Dans le cas de symétrie axiale la détermination des contraintes sur la frontière se ramène (avec une intégration analytique suivant l'angle) au calcul d'intégrales singulières, unidimensionnelles (cf. § 3, ch. I).

La précision de calcul de la solution peut être estimée par des méthodes traditionnelles [calculs pour une discrétisation plus fine, estimation de l'erreur sur les conditions aux limites, comparaison avec les caractéristiques intégrales exactes (quand par exemple, est connu, des conditions aux limites, le vecteur résultant des efforts dans la section), stabilité de la solution de l'équation intégrale]. Nous proposons un procédé nouveau qui exploite essentiellement le fait que l'équation (2.3) admet pour $\sigma = 0{,}5$ une fonction propre connue au point $\lambda = 1$. Cette fonction est une fonction vectorielle dirigée en tous les points suivant la normale à la surface et de module constant. On propose au fait de répéter le calcul pour la discrétisation utilisée dans le calcul principal, mais en posant le coefficient de Poisson égal à 0,5. L'écart obtenu pour un numéro suffisamment grand de l'itération de la direction du vecteur-solution par rapport à la normale à la surface et de son module par rapport à la valeur constante permet de juger de la précision du schéma de calcul.

Signalons un procédé permettant d'élever notablement la précision des calculs dans nombre de problèmes. On sait que la solution de certains problèmes de la théorie de l'élasticité s'exprime de façon assez simple, en fonctions élémentaires par exemple. Cependant leur résolution numérique par la méthode du potentiel peut exiger beaucoup de calculs, comme disons le problème d'une enveloppe sphérique à parois minces. Aussi peut-il s'avérer utile, avant de passer à la résolution immédiate de tel ou tel problème aux limites, de réaliser la superposition d'une solution de ce type, spécialement choisie de façon à faciliter la résolution du problème aux limites modifié. Dans le travail [113], ce procédé est illustré sur l'exemple d'un problème à symétrie axiale pour un cylindre à cavité sphérique, quand le rapport des rayons du cylindre (R) et de la sphère (r) est égal à 1,1, la

*) On les calcule en général d'autres façons en utilisant des représentations régulières.

hauteur $L = 4r$ (fig. 72). Le chargement se ramenait à une pression hydrostatique de valeur unité appliquée de l'intérieur de la cavité. On superposait à la solution recherchée la solution concernant une boule creuse de rayon extérieur R et de rayon intérieur r, la charge étant appliquée sur la surface intérieure. On obtenait ainsi un problème pour un chargement nul sur la surface de la cavité, alors que sur la surface extérieure du cylindre s'exerçaient aussi bien des contraintes normales que tangentielles. L'essentiel est que maintenant le vecteur résultant des efforts dans la section centrale du cylindre est nul, de sorte que l'on peut s'attendre à des valeurs petites des contraintes même pour une paroi mince du cylindre, tandis que dans le problème initial, ce vecteur était constant, ce qui conduisait à un accroissement des contraintes avec l'amincissement de la paroi du cylindre. Sur la figure 73 sont données les erreurs sur la solu-

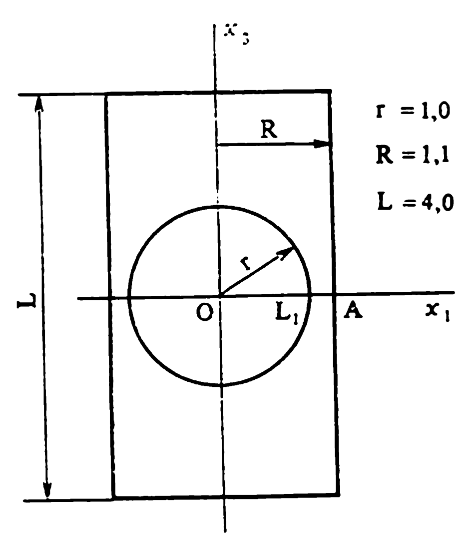


Fig. 72. Section du cylindre comportant une cavité sphérique.

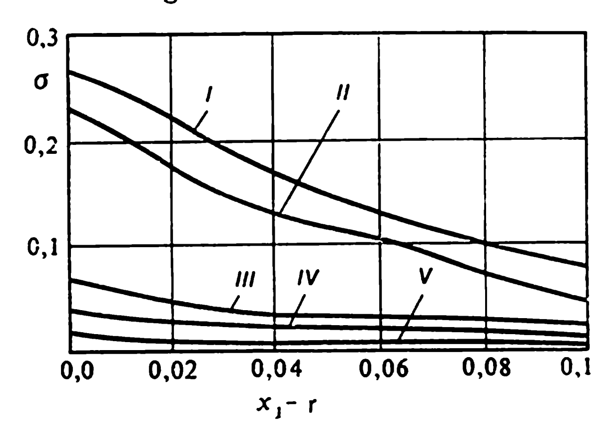


Fig. 73. Erreurs de différens schémas de calcul.

tion pour différents schémas de calcul. Les courbes I, II, III correspondent aux calculs effectués avec respectivement 40, 80

et 120 points d'appui sur le contour de la section. Les courbes IV (40 points) et V (80 points) sont obtenues par le procédé impliquant la superposition indiquée de la solution que nous venons de décrire.

Dans les exemples que nous avons traités la surface frontière était assez régulière. Considérons le cas d'une surface régulière par morceaux, c'est-à-dire constituée de surfaces régulières ouvertes ayant des frontières communes le long de certaines courbes, qui à leur tour peuvent avoir des points anguleux. On donne à l'intérieur de chacune de ces surfaces une condition aux limites de type quelconque ; quant aux conditions sur les arêtes ou aux points anguleux, celles-ci doivent être considérées comme conditions limites pour les surfaces limitrophes. On suppose par ailleurs l'absence de forces concentrées aux points singuliers *).

Partant comme auparavant de potentiels élastiques généralisés on peut sans difficultés construire des équations intégrales pour ce genre de domaines, mais des discontinuités apparaissent alors dans les noyaux et dans le coefficient du terme hors intégrale. Il n'existe malheureusement pas de théorie pour les équations de ce type. Toutefois on peut sans peine étendre formellement (avec des complications qui s'imposent) les schémas de calcul exposés plus haut.

On contourne les difficultés en effectuant séparément la discrétisation de chacune des surfaces. De cette façon aucun domaine élémentaire ne sera commun à plusieurs surfaces et les points réguliers appartiendront à deux surfaces (ou plus). Avec une telle discrétisation tous les points internes seront des points réguliers et il n'y aura aucun besoin de reviser les formules de calcul. On procède de même dans le cas de points singuliers isolés (points coniques) : chacun de ces points doit être le sommet de plusieurs domaines élémentaires.

Admettons qu'avec la diminution des domaines élémentaires les valeurs des densités et des contraintes se stabilisent partout sauf au voisinage immédiat des points irréguliers, zone qui également diminue avec la réduction des domaines élémentaires. On peut considérer la solution du problème aux limites satisfaisante si les valeurs stables des contraintes obtenues au voisinage des points singuliers (excepté le petit domaine signalé plus haut) tendent asymptotiquement vers les solutions données par les équations (8.34), (8.35), (8.52) et (8.53), ch. III, dans le cas où les conditions aux limites sont compatibles. Dans le cas contraire les représentations asymptotiques seront tirées de l'analyse des solutions pour des domaines en forme de coins.

---

*) Dans le cas contraire il faut les éliminer par superposition de solutions particulières adéquates.

Illustrons les considérations que nous venons d'exposer sur l'exemple d'un problème à symétrie axiale (extérieure et intérieure) : la surface frontière du corps était formée par la rotation d'un carré de côté $\sqrt{2}$ autour de sa diagonale. La charge se ramenait à une pression hydrostatique de valeur unité. L'intégration numérique s'effectuait suivant l'angle de rotation [149] afin de directement tenir compte de l'influence de la partition suivant l'angle de rotation. Les calculs sont effectués pour trois variantes de partition, ce qui a permis d'estimer l'influence des dimensions des domaines élémentaires. Dans le tableau 6 sont présentées les valeurs de quatre angles (en fractions de π) entre les sections méridionales qui constituent la discrétisation au voisinage de la section initiale (pour laquelle ont été effectués les calculs).

Tableau 6

A	0,001	0,002	0,002	0,05
B	0,00002	0,00004	0,0003	0,00075
C	0,00001	0,00002	0,00003	0,00004

On variait également le nombre et la disposition des points d'appui sur le contour de la section. Aux 27 points d'appui de base choisis sur les côtés du carré $0{,}01 < |z| < 0{,}99$ (ici est indiquée la z-ième coordonnée des points), symétriquement par rapport à leur milieu, on ajoutait des points d'appui supplémentaires, sur les secteurs attenant au sommet et à l'arête (symétriquement de même). Dans le tableau 7 sont données les valeurs de la coordonnée z des 4 points d'appui les plus proches du sommet pour trois variantes de partition.

Tableau 7

I	0,99	0,982	0,97	0,95
II	0,9999	0,9997	0,99925	0,994
III	0,9995	0,9999	0,9998	0,9997

Les calculs ont été effectués pour 9 variantes de discrétisation de la surface obtenues avec toutes les combinaisons possibles

présentées plus haut des partitions de l'angle et du contour. Dans le tableau 8 sont données les valeurs de la z-ième composante de la densité en quelques points d'appui (on indique leur z-ième composante) pour toutes les 9 variantes de discrétisation.

Tableau 8

z	0,9999			0,994			0,99			0,03		
	I	II	III	I	II	III	I	II	III	I	II	III
A	—	1.57	1.75	—	0.77	0.79	0.68	0.75	0.75	3.00	3.00	3.00
B	—	1.55	1.73	—	0.76	0.79	0.68	0.75	0.75	3.10	2.86	2.86
C	—	1.56	1.75	—	0.76	0.79	0.65	0.75	0.75	3.15	3.09	3.08

z	0,01			0,006			0,0001		
	I	II	III	I	II	III	I	II	III
A	4.88	4.42	4.40	—	5.30	5.25	—	4.48	4.65
B	4.43	4.11	4.08	—	5.00	4.64	—	19.4	21.7
C	5.09	4.70	4.64	—	5.81	5.67	—	26.09	29.20

Ces données montrent qu'avec la diminution des domaines élémentaires, les valeurs de la densité ont une tendance à se stabiliser, même au voisinage des points irréguliers de la surface.

Les calculs des contraintes ont montré que pour le problème intérieur l'état de contrainte dans tout le corps est déterminé avec une erreur inférieure à 0,005, partout excepté le domaine attenant au sommet et les points du domaine attenant à l'arête et qui en sont éloignés de moins de 0,05. Pour le problème extérieur, les valeurs des contraintes n'étaient différentes qu'aux points situés dans le voisinage des points non réguliers de la surface (à une distance inférieure à 0,03).

Faisons l'analyse de l'état de contrainte au voisinage des points non réguliers de la frontière dans le cas où les équations (8.55) (pour le sommet) et (8.34) (pour les points sur l'arête), ch. III, admettent des solutions non triviales conduisant à des contraintes illimitées. Etant donné la configuration du domaine considéré, de telles solutions n'apparaissent que dans le problème extérieur. De l'équation (8.55) (cf. fig. 25, t. I) il découlera que pour $\nu = 0{,}3$ les contraintes au voisinage du sommet se comportent comme $C(\varphi, \theta)\rho^{-0{,}2}$ (en coordonnées sphériques locales). La fonction $C(\varphi, \theta)$ sera, bien entendu, différente pour chaque composante.

Le problème considéré ayant un plan de symétrie des forces et géométrique, la solution asymptotique au voisinage de l'arête doit être symétrique. Ceci étant, les constantes B et D figurant dans la représentation (8.24), ch. III, doivent s'annuler. Donc, pour déterminer la solution il faut se reporter à l'équation (8.30). Cette équation possède la racine $\lambda = 0{,}545$ pour l'angle $\alpha = 3/4\pi$, ce qui conduit à $C(\varphi)\, \rho^{-0{,}455}$ (en coordonnées locales dans le plan perpendiculaire à l'arête).

A partir des représentations (8.51) et (8.22), ch. III, on établit la forme des fonctions $C(\varphi, \theta)$ et $C(\varphi)$ à un facteur constant près, le même pour toutes les composantes des contraintes. Dans le dernier cas les formules (8.26) après le remplacement de la constante A par C conformément à (8.31) conduisent directement au résultat cherché.

Se pose ensuite le problème de l'extraction des fonctions $C(\varphi, \theta)$ et $C(\varphi)$ de la solution numérique du problème aux limites en contraintes. Nous partirons de l'exigence tout à fait naturelle (en raison de l'analyticité de la solution des équations de la théorie de l'élasticité aux points internes) que la solution numérique soit tangente continûment à la solution asymptotique. A cet effet, nous déterminons en quelques points du domaine, proches du point non régulier considéré et situés sur le rayon passant par celui-ci, la valeur de telle ou telle composante des contraintes à partir de la solution numérique et de la représentaion asymptotique $\rho^{\lambda-1}$ (avec λ correspondant) dans un repère local. Nous construisons ensuite le rapport de ces quantités. Pour point de jonction des solutions numérique et asymptotique on propose de prendre (sur le rayon considéré) le point auquel ce rapport est extrémal et le rapport en ce point, pour la valeur recherchée du facteur.

Plus bas, on présente dans le tableau 9 les valeurs obtenues par calcul d'après le schéma IIIC des composantes des contraintes

Tableau 9

r	σ_r	σ_φ	σ_z	$\rho^{-0,455}$	$\sigma_r \rho^{0,455}$	$\sigma_\varphi \rho^{0,455}$	$\sigma_z \rho^{0,455}$
1,00003	25,10	19,76	37,54	114,26	0,220	0,173	0,328
1,00005	21,21	15,72	30,43	90,57	0,234	0,174	0,336
1,00008	17,25	12,06	25,05	73,13	0,235	0,176	0,342
1,00012	14,21	10,78	21,11	60,80	0,233	0,177	0,347
1,00015	12,73	9,78	19,20	54,94	0,231	0,178	0,349
1,00035	8,39	6,81	13,42	37,36	0,225	0,182	0,359
1,00100	5,05	4,29	8,52	23,17	0,218	0,185	0,368
1,00250	3,16	2,81	5,56	15,27	0,207	0,183	0,364
1,00400	2,43	2,23	4,41	12,33	0,197	0,181	0,358

aux points situés dans le plan de symétrie (dans un repère local), les valeurs de la fonction $\varphi^{-0,455}$ et le rapport des contraintes à cette fonction.

On remarque un maximum assez net. Procédant par interpolation, on peut proposer pour les fonctions $\sigma_r = C_r\rho^{-0,455}$, $\sigma_\varphi = C_\varphi\rho^{-0,455}$ et $\sigma_z = C_z\rho^{-0,455}$ ($\rho = r - 1$) les valeurs suivantes de coefficients : $C_r = 0{,}235$, $C_\varphi = 0{,}185$ et $C_z = 0{,}368$. Les solutions asymptotiques ainsi construites sont valables au voisinage de l'arête à une distance inférieure à 0,0001.

Sur la figure 74 sont représentées les valeurs de la composante σ_z obtenues par résolution de l'équation intégrale correspondante

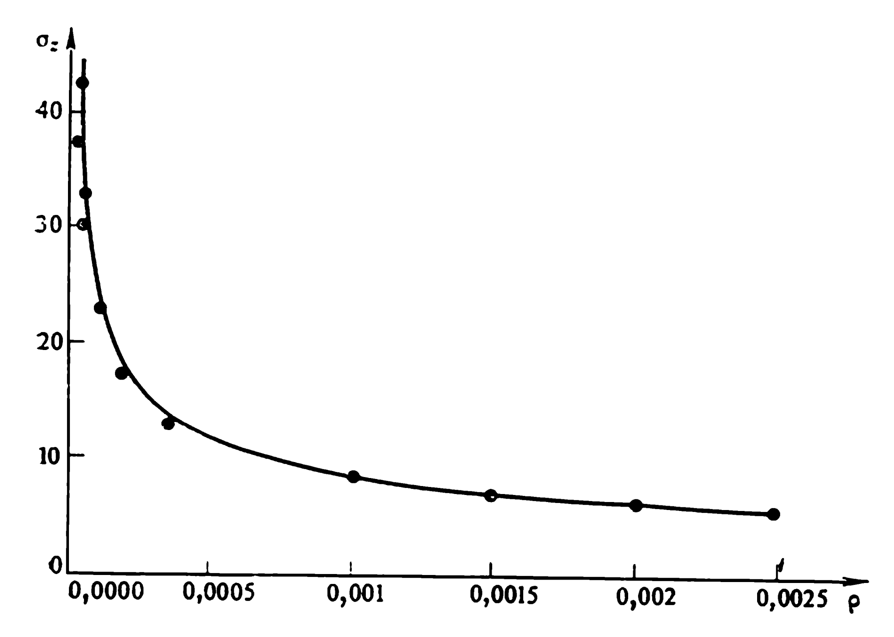


Fig. 74. Contraintes σ_z dans le plan médian.

(petits cercles), ainsi que la solution asymptotique (courbe continue).

On présente dans le tableau 10 de la page suivante les valeurs des contraintes $\sigma_r = \sigma_\varphi$ et σ_z sur l'axe de rotation obtenues par calcul d'après le schéma IIIC, les valeurs de la fonction $\rho^{-0,2}$ et le rapport des contraintes à cette fonction.

Un maximum est également observé ici. Aussi peut-on proposer pour les fonctions $\sigma_r = C'_r\rho^{-0,2}$ et $\sigma_z = C'_z\rho^{-0,2}$ ($\rho = |z| - 1$) les valeurs suivantes des constantes : $C'_r = 0{,}643$ et

$C'_z = 0,549$. Sur la figure 75 sont montrées les valeurs de la composante σ_r, tirées de la solution de l'équation intégrale, et la représentation asymptotique.

Tableau 10

z	$\sigma_r = \sigma_\varphi$	σ_z	$\rho^{-0.2}$	$\sigma_r\,\rho^{0.2}$	$\sigma_z\rho^{0.2}$
1,000001	8.29	6.44	15.85	0.522	0.406
1,000003	7.74	6.26	12.72	0.609	0.500
1,000007	6.90	5.83	10.74	0.642	0.543
1,000010	6.43	5.49	10.00	0.643	0.549
1,000015	5.87	4.15	9.22	0.636	0.538
1,000025	5.13	4.07	8.32	0.615	0.489

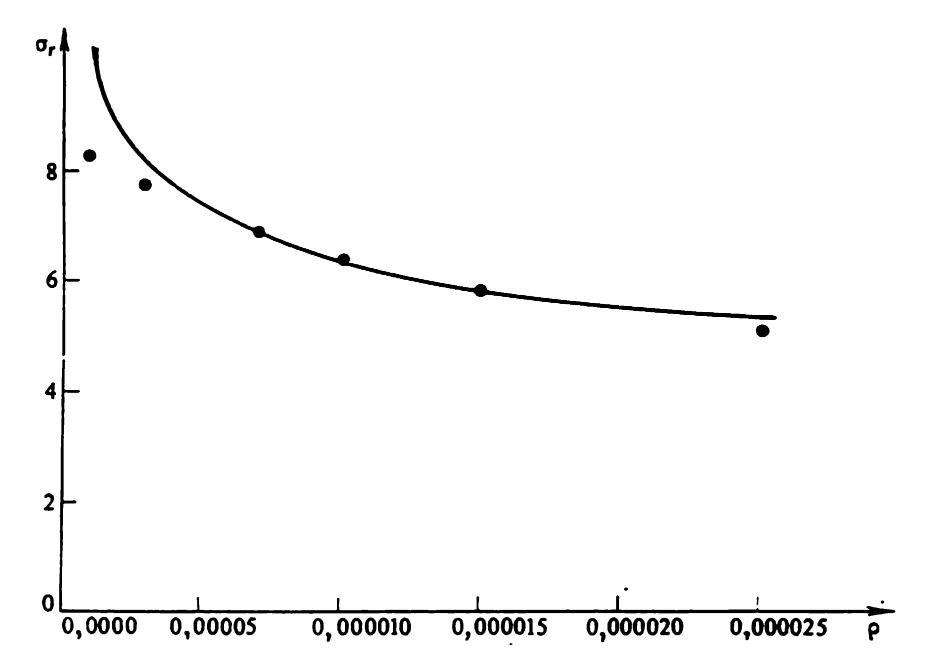


Fig. 75. Contraintes σ_z sur l'axe de rotation.

Pour estimer la précision des valeurs obtenues des coefficients on propose d'utiliser le fait que leur rapport est connu. Comme on a noté au § 8 du chapitre III, la représentation asymptotique de la solution à proximité d'une arête régulière est la même qu'en déformation plane. Or, dans ce dernier cas on a entre les con-

traintes la relation (4.5), ch. III. Aussi entre les coefficients C_r, C_φ et C_z doit exister une relation analogue

$$C_\varphi = \sigma(C_r + C_z).$$

D'autre part, on déduit de (8.26) et (8.31) qu'entre les composantes σ_r et σ_z doit exister une relation qui entraîne entre les coefficients C_r et C_z la relation :

$$\frac{C_z}{C_r} = \frac{-(1+\lambda)\cos(1-\lambda)\alpha + (1+\lambda)\cos(1+\lambda)\alpha}{(1+\lambda)\cos(1-\lambda)\alpha + (3-\lambda)\cos(1+\lambda)\alpha}.$$

Dans le cas considéré où $\alpha = 3/4\pi$ et $\lambda = 0{,}545$, nous obtenons $C_z/C_r = 1{,}473$.

Dans le tableau 11 sont présentées les valeurs des coefficients C_r, C_φ, C_z, C'_r et C'_z pour toutes les 9 variantes de discrétisation de la surface et les valeurs de l'erreur commise au cours de la réalisation des relations introduites plus haut.

Tableau 11

		C_r	C_φ	C_z	Δ_1	Δ_2	C'_r	C'_z
I	A	0.20	0.18	0.34	0.09	0.15	0.52	0.43
	B	0.16	0.16	0.32	0.09	0.35	0.51	0.45
	C	0.212	0.16	0.34	0.09	0.10	0.51	0.46
II	A	0.11	0.16	0.31	0.23	0.30	0.60	0.43
	B	0.16	0.16	0.33	0.20	0.40	0.58	0.42
	C	0.22	0.19	0.38	0.05	0.16	0.59	0.43
III	A	0.13	0.16	0.33	0.16	0.70	0.65	0.55
	B	0.18	0.16	0.32	0.06	0.24	0.64	0.54
	C	0.23	0.18	0.37	0.02	0.06	0.64	0.55

L'erreur s'est naturellement avérée minimale pour le schéma de calcul IIIC.

On peut également (mais de façon plus compliquée) obtenir des relations entre les coefficients C'_r et C'_z.

Pour estimer la précision de la solution du problème considéré on a effectué des calculs selon l'algorithme des approximations successives pour $\sigma = 0{,}5$. Dans ces cas les itérations de φ_n ont conduit assez rapidement à une fonction vectorielle dirigée suivant la normale à la surface et de même module. Les écarts angulaires de plus de un degré et de 0,03 en module étaient observés uniquement sur les parties proches du sommet (d'étendue inférieure à 0,03) et de l'arête (d'étendue inférieure à 0,12).

Notons en conclusion qu'on a construit également la solution du problème pour le même domaine, mais pour des charges de signes différents sollicitant les parties inférieure et supérieure de la surface. Par raison de symétrie, les contraintes normales s'annulent dans le plan de symétrie et les contraintes tangentielles admettent, elles, une représentation asymptotique qui se détermine par la racine de l'équation (8.32), ch. III. Pour $\alpha = 3/4\pi$ cette racine est 0,9. Par suite, τ_{rz} seront de l'ordre de $\rho^{-0,1}$. Dans le tableau 12 sont données les valeurs de la contrainte tangentielle dans le plan de symétrie, la fonction $\rho^{-0,1}$ et leur rapport.

Tableau 12

r	τ_{rz}	$\rho^{-0,1}$	$\tau_{rz}\rho^{0,1}$
1,00001	1,093	3,16	0,346
1,00003	1,070	2,83	0,378
1,00005	0,995	2,67	0,373
1,00008	0,907	2,57	0,353

On a dans ce cas $\tau_{rz} = 0,378\ \rho^{-0,1}$.

Les résultats que nous avons obtenus permettent d'affirmer que la méthode des approximations successives est applicable même en présence de points singuliers, bien que ceux-ci nécessitent d'effectuer dans leur voisinage une discrétisation assez fine.

La méthode exposée a été utilisée dans [15] pour la résolution d'un problème relatif à un espace infini affaibli par deux cavités cubiques identiques (fig. 76). Le chargement se ramenait à une

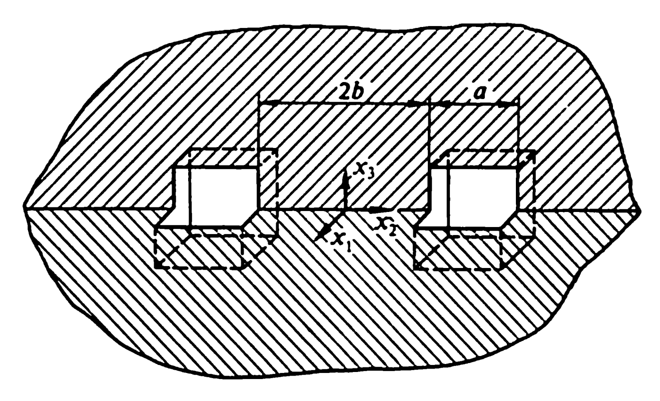


Fig. 76. Espace à deux cavités cubiques.

pression hydrostatique *. La discrétisation des arêtes a été réalisée de la manière suivante. On se donnait sur les arêtes des points de plus en plus rapprochés vers les sommets. Les droites réunissant les points correspondants des arêtes opposées partageaient les faces des cavités en rectangles de différentes dimensions. La présence de trois plans de symétrie a permis de n'effectuer les calculs des fonctions $\varphi_n(q)$ que sur un quart de la surface de l'une des cavités. Sur la figure 77 sont représentés les diagrammes des contraintes $\sigma_1 = \sigma_3$ et σ_2 sur la droite réunissant les centres des cavités pour différentes épaisseurs de la cloison ($2b = 3a$ et $2b = 0{,}5\ a$). Sur les arêtes ont été choisis sept points qui les divisaient en segments de longueurs 0,05 a, 0,10 a, 0,15 a, 0,20 a et ensuite dans l'ordre inverse. Une convergence rapide des $\varphi_n(q)$ vers zéro a permis de se limiter à sept itérations. Il est montré qu'une partition de l'arête en 10 segments ne conduit pratiquement à aucune amélioration du résultat.

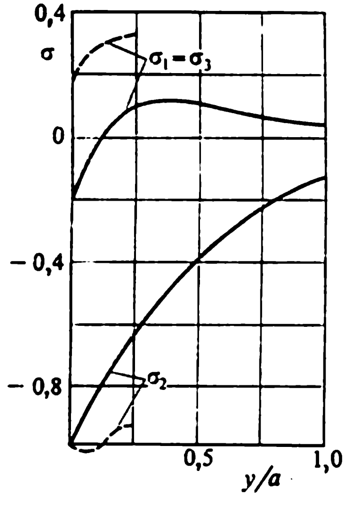


Fig. 77. Contraintes σ_1, σ_2, σ_3 le long de la ligne des centres des cavités cubiques.

Comme on a noté au § 2, les équations (2.3) et (2.5) possèdent des propriétés spectrales équivalentes. Comparons-les du point de vue de leur réalisation numérique. Dans le premier cas la condition aux limites est donnée, alors que dans le second elle doit être préalablement calculée en un ensemble suffisamment dense de points de la surface frontière. La procédure impliquant le calcul d'intégrales impropres bidimensionnelles est très volumineuse. Il est vrai que la solution de l'équation intégrale donne d'emblée les déplacements aux points de la frontière, alors qu'avec l'équation (2.3) il faut pour cela, ayant déterminé la densité, calculer les mêmes intégrales impropres. La différence de principe consiste en ce que si même d'après la position du problème il est nécessaire de déterminer les déplacements aux points de la frontière, ce n'est qu'en quelques points uniquement. S'agissant des contraintes aux points intérieurs ou frontières, la représentation des déplacements sous forme de potentiel de cou-

*) Par superposition d'une solution triviale il est facile de passer au problème où la pression hydrostatique s'exerce à l'infini tandis que les cavités sont libres de charges.

che simple s'avère beaucoup plus économique que les représentations (1.12) ou (1.14) du point de vue du calcul électronique.

La circonstance suivante parle également en faveur de l'équation (2.3). L'ayant résolue approximativement, on porte dans son premier membre la solution obtenue et l'on juge, d'après la grandeur de l'écart du second membre, de la précision de la solution du problème aux limites. Dans le cas de l'équation (2.5) l'écart comprendra l'erreur commise lors du calcul du second membre et sera donc moins parlant sur l'erreur de la solution du problème aux limites.

Examinons encore une méthode de résolution numérique des problèmes spatiaux de l'élasticité [76]. Il s'agit des procédés de résolution directe des équations fonctionnelles tirées des identités (1.13) et (1.15), lorsque sur la surface sont donnés les déplacements ou les contraintes (et sont respectivement inconnus les contraintes ou les déplacements). On propose dans ce cas d'effectuer une discrétisation quelconque de la surface S et de considérer comme inconnues les valeurs des contraintes (ou des déplacements) aux points centraux. Pour les déterminer en dehors du domaine on demande qu'en certains points (dont le nombre est égal à celui des domaines élémentaires) soient vérifiées les identités (1.13) ou (1.15). Les questions concernant la réalisation pratique de cette méthode (se ramenant en somme au choix optimal des points indiqués) sont étudiées dans [159] où l'on montre d'autre part qu'une polygonalisation de la surface permet de calculer toutes les intégrales sous forme explicite.

En conclusion disons quelques mots sur la résolution des équations intégrales singulières rencontrées dans les problèmes d'oscillations établies. Les intégrales se calculent dans ce cas à l'aide des représentations régulières analogues à (3.1) et (3.2) ou alors (effectuant une polygonalisation de la surface frontière) par les formules obtenues dans [122].

Si, pour les problèmes extérieur et intérieur, la fréquence des oscillations est inférieure à la première fréquence propre du problème intérieur, la solution de l'équation intégrale peut être obtenue par approximations successives. Dans le cas général il est préférable d'utiliser la méthode d'intégration mécanique ramenant le problème à un système d'équations algébriques. On tire de ce système les valeurs des fréquences propres qui sont les racines de son déterminant.

§ 4. Application du potentiel volumique

Au § 2 on a démontré que le potentiel de volume (1.25) vérifie l'équation de Lamé à second membre égal à la densité. Cette circonstance permet de ramener la résolution des problèmes non

homogènes de la statique (tels sont les problèmes où interviennent des forces massiques et les problèmes de thermoélasticité non liée) à la résolution de problèmes homogènes. Pour cela il faut retrancher de la solution recherchée (en déplacements) le potentiel

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega} \Gamma(p', p)\, \varphi(p')\, d\Omega_p, \tag{4.1}$$

où $\varphi(p)$ sont des forces massiques ou encore γ grad T.

La superposition implique que soient modifiées en conséquence les conditions aux limites. Sur la partie de la surface où sont donnés les déplacements il faut retrancher des conditions initiales l'intégrale

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega} \Gamma(p, q)\, \varphi(p)\, d\Omega_p, \tag{4.2}$$

et sur la partie où sont données les contraintes, l'intégrale

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega} T_{n(q)}\Gamma(p, q)\, \varphi(p)\, d\Omega_p. \tag{4.3}$$

On entend ici par $n(q)$ la direction de la normale à la surface.

Les intégrales (4.2) et (4.3) étant des intégrales impropres, leur calcul ne pose pas de difficultés de principe.

S'agissant des problèmes de thermoélasticité, on doit penser à des opérations complémentaires. Le fait est qu'en vertu des équations de Duhamel-Neumann (5.3), ch. III, pour avoir à résoudre un problème isotherme, on doit appliquer sur la partie de la surface où sont données les contraintes, également des contraintes mais dirigées suivant la normale à la surface et égales en grandeur à γT (qu'on appelle *potentiel thermique*). La résolution du problème obtenu (compte tenu de l'application du potentiel (4.1) avec le signe contraire) conduira à un problème de thermoélasticité qui sera résolu en déplacements. Pour déterminer les contraintes il faut se servir des formules de Duhamel-Neumann. Aux contraintes tirées de la solution du problème isotherme il est nécessaire d'adjoindre un tenseur sphérique de composantes γT.

On montre dans [127] que les intégrales de volume (4.2) et (4.3) se laissent calculer par les programmes ayant servi à la résolution des équations intégrales (2.3) par approximations successives. A cette fin il convient de diviser le corps en des couches minces (à l'intérieur desquelles on peut admettre que le gradient de température grad T suivant la normale aux surfaces frontières varie faiblement). On peut alors ramener le calcul de l'intégrale

de volume au calcul de la somme des intégrales étendues aux surfaces médianes sur lesquelles est donnée la densité, égale au produit de la valeur moyenne de γ grad T par l'épaisseur locale de la couche, i.e. au calcul d'un ensemble de potentiels de couche simple. Ainsi, introduisant dans le programme de résolution de l'équation intégrale (2.2) les surfaces indiquées en tant que surfaces frontières et opérant des itérations zéro, i.e. envoyant les conditions aux limites à la place de la densité, on obtient l'intégrale de volume cherchée.

Dans [4] ce procédé a été appliqué à la résolution d'un problème à symétrie axiale relatif à un cylindre comportant une cavité (fig. 78) quand sur les surfaces intérieure et extérieure du cylindre

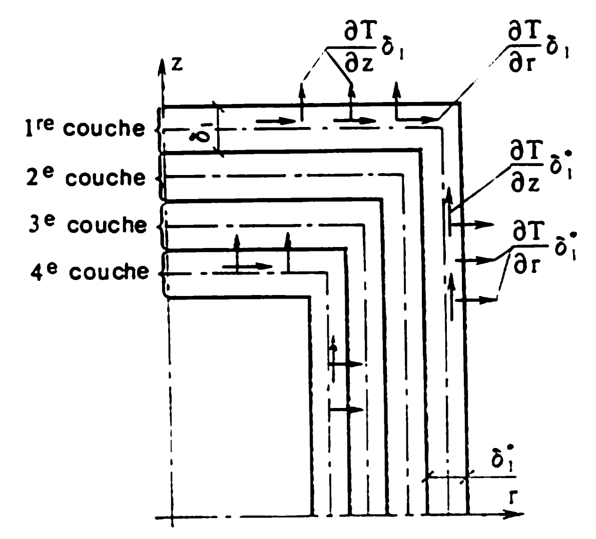


Fig. 78. Partition d'un domaine en couches.

la température était constante ($T = T_0$ et $T = 0$). La distribution des températures se trouvait par la méthode des différences finies. Une précision assez élevée était atteinte avec quatre couches. Sur la figure 79 sont montrés les diagrammes des contraintes thermiques sur l'axe de rotation. Les valeurs des contraintes sont données en fractions de $\frac{\alpha E}{1-2\gamma} T_0$.

Nombre de travaux [52, 23] sont consacrés à l'étude des problèmes de thermoélasticité dans le cas spécial où les sources internes de chaleur sont absentes, de sorte que la distribution des températures vérifie une équation harmonique. Il est possible alors de passer des intégrales de volume à des intégrales de surface. Cependant, les intégrales qu'on obtient sont singulières.

Dans [52] cette procédure est réalisée à l'aide de potentiels dits biharmoniques [49].

Signalons aussi que dans certains cas particuliers, ayant d'ailleurs une grande importance pratique, la solution des équations non homogènes se construit sous forme explicite. Soit un milieu de densité constante ρ, le champ de pesanteur est dirigé suivant l'axe z. La solution s'écrit alors

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_y = 0, \\ \sigma_z &= \rho g z + \text{const}, \end{aligned} \tag{4.4}$$

où g est l'accélération de la pesanteur.

Attirons l'attention sur le fait qu'en mécanique des roches il est d'usage d'introduire complémentairement les composantes

$$\sigma'_x = \sigma'_y = k\sigma_z, \tag{4.5}$$

où k est un facteur, dit indice de poussée naturelle, tiré de l'expérience. La présence de ces termes s'explique par le fait qu'au cours de la formation du massif rocheux l'état de contrainte subit l'influence de facteurs non élastiques.

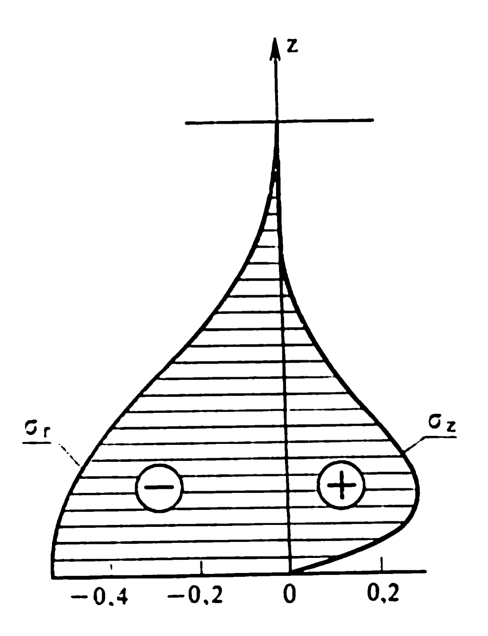


Fig. 79. Contraintes sur l'axe de rotation.

Un autre cas particulier est celui d'un corps tournant avec une vitesse angulaire ω autour de l'axe z. Dans ce cas la solution particulière (en coordonnées cylindriques) est de la forme :

$$u_z = u_\varphi = 0, \qquad u_r = -\frac{\rho\omega^2 r^3}{8(\lambda + 2\mu)}$$

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{2\lambda + 3\mu}{4(\lambda + 2\mu)}\rho\omega^2 r^2, \\ \sigma_\varphi &= -\frac{2\lambda + \mu}{4(\lambda + 2\mu)}\rho\omega^2 r^2, \\ \sigma_z &= \nu(\sigma_r + \sigma_\varphi). \end{aligned}\right\} \tag{4.6}$$

§ 5. Equations intégrales des problèmes mixtes

Nous supposerons que la surface S d'un corps élastique est constituée de deux parties S_1 et S_2 ayant une frontière commune. On demande de déterminer dans un domaine D le vecteur déplacements $\boldsymbol{u}(p)$ connaissant les conditions aux limites

$$\lim_{p \to q} \boldsymbol{u}(p) = \boldsymbol{F}_1(q) \quad (q \in S_1),$$
$$\lim_{p \to q} \boldsymbol{T}_{\nu(p)} \boldsymbol{u}(p) = \boldsymbol{F}_2(q) \quad (q \in S_2). \tag{5.1}$$

Représentant les déplacements sous forme de potentiels élastiques généralisés, nous obtenons d'emblée, en utilisant (5.1), des équations déterminées pour leurs densités. Avec, par exemple, le potentiel de couche simple $\boldsymbol{V}(p, \boldsymbol{\varphi})$ nous obtenons une équation intégrale de la forme

$$\int_S \boldsymbol{\Gamma}(q, q_1) \boldsymbol{\varphi}(q_1) dS_{q_1} = \boldsymbol{F}_1(q) \quad (q \in S_1),$$
$$\boldsymbol{\varphi}(q) - \lambda \int_S \boldsymbol{\Gamma}_1(q, q_1) \boldsymbol{\varphi}(q_1) dS_{q_1} = \boldsymbol{F}_2(q) \quad (q \in S_2), \tag{5.2}$$

$\lambda = 1$ correspondant au problème extérieur et $\lambda = -1$ au problème intérieur. Dans le dernier cas il faut changer le signe de la fonction $\boldsymbol{F}_2(q)$. Cette équation est une équation à noyau discontinu et à coefficient discontinu du terme hors intégrale. La théorie des équations de ce type est inexistante.

Représentant par contre les déplacements sous forme de potentiel de couche double $\boldsymbol{W}(p, \boldsymbol{\varphi})$ nous obtenons

$$\boldsymbol{\varphi}(q) - \lambda \int_S \boldsymbol{\Gamma}_2(q, q_1) \boldsymbol{\varphi}(q_1) dS_{q_1} = \boldsymbol{F}_1(q) \quad (q \in S_1),$$
$$\lim_{p \to q} \boldsymbol{T}_{\nu(p)} \int_S \boldsymbol{\Gamma}_2(p, q_1) \boldsymbol{\varphi}(q_1) dS_{q_1} = \boldsymbol{F}_2(q) \quad (q \in S_2). \tag{5.3}$$

Cette équation n'est pas une équation intégrale, puisque dans la deuxième équation il est impossible d'intervertir l'ordre de différentiation et d'intégration.

Un autre procédé de construction des équations intégrales de problèmes mixtes est fondé sur l'utilisation de deux potentiels,

dont les densités sont données sur les surfaces ouvertes S_1 et S_2 :

$$
\begin{aligned}
W(p, \varphi) &= \int_{S_1} \Gamma_2(p, q)\, \varphi(q)\, dS_q \quad (q \in S_1),\\
V(p, \varphi) &= \int_{S_2} \Gamma(p, q)\, \varphi(q)\, dS_q \quad (q \in S_2).
\end{aligned}
\tag{5.4}
$$

Passant à la limite vers la frontière dans la somme $V + W$ nous obtenons pour les points intérieurs des surfaces S_1 et S_2 un système d'équations intégrales singulières à noyaux discontinus

$$
\begin{aligned}
\varphi(q) - \lambda \int_{S_1} \Gamma_2(q, q_1)\, \varphi(q_1)\, dS_{q_1} - \lambda \int_{S_2} \Gamma(q, q_1) \varphi(q_1) dS_{q_1} &= F_1(q) \quad (q \in S_1),\\
\varphi(q) = \lambda \int_{S_1} \Gamma_3(q, q_1)\, \varphi(q_1)\, dS_{q_1} - \lambda \int_{S_2} \Gamma_1(q, q_1)\, \varphi(q_1) dS_{q_1} &= F_2(q) \quad (q \in S_2),
\end{aligned}
\tag{5.5}
$$

où $\Gamma_3(q, q_1) = T_{\nu(q)}\Gamma_2(q, q_1)$. Dans la deuxième équation (5.5) l'intervertissement de l'ordre de différentiation et d'intégration est possible puisque $q \in S_2$. Cette approche a été appliquée au problème spatial [49] avec emploi de potentiels dits biharmoniques [50] ainsi qu'aux problèmes plans [6].

Notons encore une équation intégrale qui peut être obtenue à l'aide des identités (1.12) ou (1.14) :

$$
\begin{aligned}
\int_{S_1} \Gamma(q, q_1)\, T_\nu u(q_1)\, dS_{q_1} + \int_{S_2} \Gamma_2(q, q_1)\, u(q_1)\, dS_{q_1} &= F_3(q) \quad (q \in S_1)\\
u(q_1) - \int_{S_1} \Gamma(q, q_1)\, T_\nu u(q_1)\, dS_{q_1} - \int_{S_2} \Gamma_2(q, q_1) u(q_1) dS_{q_1} &= F_4(q) \quad (q \in S_2),
\end{aligned}
\tag{5.6}
$$

où

$$
F_3(q) = F_1(q) - \int_{S_2} \Gamma(q, q_1)\, F_2(q_1)\, dS_{q_1} - \int_{S_1} \Gamma_2(q, q_1) F_1(q_1)\, dS_{q_1},
$$

et

$$
F_4(q) = -\int_{S_2} \Gamma(q, q_1)\, F_2(q_1)\, dS_{q_1} - \int_{S_1} \Gamma_2(q, q_1) F_1(q_1)\, dS_{q_1}.
$$

Les signes correspondent au problème intérieur.

Les équations (5.6) sont de même des équations singulières à noyaux discontinus et à coefficient discontinu du terme hors

intégrale. Les conditions de résolubilité des équations du type (5.6) ne sont étudiées non plus. On peut néanmoins proposer pour la résolution des équations (5.2), (5.5), (5.6) des méthodes numériques efficaces *). Ne présente pas de difficultés par exemple la méthode d'intégration mécanique. Pour le calcul des intégrales singulières des équations (5.2), (5.5) et (5.6) on peut utiliser la représentation (3.2) sous sa forme modifiée. Une polygonalisation de la surface permet d'appliquer les formules de calcul des intégrales de volume [1, 20.].

Remarquons que la résolution des problèmes mixtes par la méthode des équations fonctionnelles ne présente pratiquement rien de nouveau par rapport au cas des problèmes fondamentaux.

Arrêtons-nous sur la résolution de l'équation (5.2). La présence dans cette équation d'un opérateur de première espèce rend le problème mal posé, ce qui peut se manifester dans l'instabilité de tel ou tel algorithme numérique, bien que le problème aux limites soit bien posé **).

Supposons que la contrainte extérieure à déterminer sur la surface S_1 soit représentée sous forme du produit d'une série à coefficients inconnus suivant un système complet de fonctions par une fonction tenant compte de l'ordre de la singularité en contraintes (qui se définit conformément au § 8 du chapitre III). Nous sommes conduits dans ce cas à un ensemble de problèmes aux limites du type II. Résolvant d'une façon ou d'une autre ces problèmes nous trouvons dans chaque cas les déplacements sur S_1. On détermine ensuite les coefficients de la série attirant pour cela les conditions aux limites sur S_1. On peut procéder par la méthode des collocations, la méthode des moindres carrés, etc. Le fait d'utiliser des séries tronquées pour l'obtention des systèmes d'équations algébriques servant à déterminer les coefficients peut donner lieu à des systèmes mal conditionnés, le rapport de conditionnement croissant avec l'accroissement de l'ordre du système. Pour résoudre de tels systèmes on peut appliquer les algorithmes de régularisation décrits au § 16 du chapitre I.

Examinons les difficultés complémentaires auxquelles on peut se heurter dans la résolution des problèmes intérieurs. Le fait est que dans chaque cas la charge appliquée au corps s'avère en général non auto-équilibrée et de ce fait le problème aux limites. irrésoluble. Pour pallier à cet inconvénient le plus simple est d'introduire en un point quelconque une force et un moment afin d'équilibrer la charge extérieure. De la condition d'équilibre

*) Notons que certains problèmes mixtes ont déjà été traités à l'aide des équations (5.5), (5.6) [20].

**) La démonstration de l'existence et de l'unicité de la solution du problème est exposée dans le § 1 du chapitre VIII.

du corps en entier il suivra que dans la solution définitive (après sommation) les termes complémentaires se réduisent.

Notons que l'approche que nous venons d'exposer est applicable quand sur la surface S_1 sont données la composante normale des déplacements et les composantes tangentielles des contraintes. On n'a alors à déterminer sur la surface S_1 qu'une seule fonction scalaire (la composante normale des contraintes).

Pour obtenir les algorithmes stables de résolution du problème mixte, considérons un problème modifié en introduisant sur la surface S_1 la condition aux limites

$$\lim_{p\to q}\,[\alpha \boldsymbol{T}_\nu \boldsymbol{u}(p) + \boldsymbol{u}(p)] = \boldsymbol{F}_1(q), \tag{5.7}$$

où $\alpha > 0$ est un nombre suffisamment petit [80]. Sur la surface S_2 la condition aux limites conserve sa forme précédente (5.1).

Posons pour plus de simplicité $\boldsymbol{F}_2(q) = 0$ et considérons dans le domaine D des déplacements vérifiant des conditions aux limites homogènes sur S_2. Le problème aux limites initial peut alors être représenté comme un problème sur l'espace des fonctions vérifiant ces conditions : symboliquement ce problème s'écrit sous la forme

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{F}_1. \tag{5.8}$$

De façon analogue pour le problème (5.7) nous avons

$$\boldsymbol{A}[\alpha \boldsymbol{T}_\nu \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}] = \boldsymbol{F}_1. \tag{5.9}$$

Les solutions de ces deux problèmes seront suffisamment proches (pour de petits α) dans des espaces quelconques *) si l'opérateur $\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}_\nu$ est borné.

Dans la recherche de la solution du problème (5.9) nous partirons également de la représentation des déplacements sous forme de potentiel de couche simple. Ceci nous donne les équations intégrales

$$\alpha\left[\boldsymbol{\varphi}(q) - \lambda \int_S \boldsymbol{\Gamma}_1(q, q_1)\,\boldsymbol{\varphi}(q_1)\,dS_{q_1}\right] + \\ + \int_S \boldsymbol{\Gamma}(q, q_1)\,\boldsymbol{\varphi}(q_1)\,dS_{q_1} = \boldsymbol{F}_1(q) \quad (q \in S_1), \tag{5.10}$$

où

$$\boldsymbol{\varphi}(q) - \lambda \int_S \boldsymbol{\Gamma}_1(q, q_1)\,\boldsymbol{\varphi}(q_1)\,dS_{q_1} = 0 \quad (q \in S_2);$$

λ est choisi comme dans l'équation (5.2).

*) On peut faire appel aux *espaces de Sobolev-Slobodetski* [160].

Les équations (5.10) ne différant des équations du deuxième problème fondamental que par un opérateur entièrement continu, leur résolubilité se démontre en démontrant l'unicité de la solution.

Pour la démonstration de l'unicité nous utilisons la première formule de Betti (cf. § 4, ch. II)

$$\int_S uT_\nu u\,dS + \int_D E(u, u)\,d\Omega = 0.$$

Transformant la première intégrale en utilisant les conditions aux limites nous obtenons l'égalité

$$\frac{1}{\alpha}\int_{S_1} u_i u_i\,dS + \int_D E(u, u)\,d\Omega = 0. \qquad (5.11)$$

Chacune des intégrales étant une grandeur non négative, les déplacements sont identiquement nuls. Aussi, admettant la non-unicité de la solution des équations intégrales en question, nous serons conduits à l'existence d'un potentiel de couche simple s'annulant dans D, ce qui entraîne la nullité de la densité même.

Le choix du paramètre α doit naturellement dépendre de l'erreur admissible sur la solution des équations (5.10).

Voyons quelques exemples. Les problèmes seront résolus tout d'abord directement à l'aide de l'équation (5.2). Etudions un problème de contact à symétrie axiale [84]. Soit dans le demi-espace une cavité cylindrique de rayon a et de hauteur H, au fond de laquelle est appliquée sans frottement une étampe de même rayon avec un effort donné p. En dehors de la cavité les contraintes extérieures sont supposées nulles. La composante normale de la contrainte sera choisie sous la forme d'une série (l'axe z coïncide avec l'axe du cylindre)

$$\sigma_z\left(\frac{\rho}{a}\right) = \left[1 - \left(\frac{\rho}{a}\right)^2\right]^{-2/3}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \left(\frac{\rho}{a}\right)^{2n}\right]. \qquad (5.12)$$

L'exposant $-2/3$ est tiré de l'équation (8.38), ch. III, pour $2\alpha = 1{,}5\pi$.

Les calculs ont été effectués en retenant dans (5.12) un, deux et trois termes. Dans le tableau 13 sont présentés les coefficients α_0, α_1 et α_2, le déplacement adimensionnel de l'étampe w' ($w' = w\,a\,E/p$) et l'erreur maximale Δ qu'on a commise sur la condition aux limites (en déplacements) calculés pour deux valeurs de H/a.

Tableau 13

H/a	α_0	α_1	α_2	w'	Δ
0,2	1,000	—	—	0,386	0,0380
	1,276	−0,368	—	0,392	0,0032
	1,266	−0,409	0,126	0,383	0,0030
3,5	1,000	—	—	0,303	0,0132
	1,061	−0,082	—	0,305	0,0055

Fait important : le déplacement de l'étampe w ne dépend pratiquement pas du nombre de termes retenus dans (5.12).

Considérons un autre problème à symétrie axiale. Soit une plaque circulaire d'épaisseur 2 et de rayon 10. Sur les faces S_2 de la plaque les contraintes sont nulles et sur la surface latérale S_1

$$u_r = 0, \quad u_z = z. \tag{5.13}$$

Les contraintes s'exerçant sur la surface latérale (de contact) peuvent être représentées sous la forme des séries

$$\begin{aligned} \sigma_r(z) &= \frac{1}{(z^2-1)^{0.31}} \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} T_{2n}(z), \\ \tau_{rz}(z) &= \frac{1}{(z^2-1)^{0.31}} \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} T_{2n+1}(z), \end{aligned} \tag{5.14}$$

où $T_n(z)$ sont des polynômes de Tchébychev. Le facteur figurant devant le signe somme tient compte de la nature de la singularité conformément à l'équation (8.37), ch. III. La solution de l'équation intégrale (5.10) sera aussi recherchée sous la forme d'une série

$$\varphi(q) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \varphi_k(z), \tag{5.15}$$

où $\varphi_k(z)$ est la solution des équations intégrales du deuxième problème fondamental pour les conditions

$$\boldsymbol{T}_\nu \boldsymbol{u}|_{S_2} = 0, \quad \boldsymbol{T}_\nu \boldsymbol{u}|_{S_1} = \boldsymbol{\Phi}_k(z),$$

$$\boldsymbol{\Phi}_k(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{(z^2-1)^{0.31}} [T_k(z),\ 0] & (k \text{ pair}), \\ \dfrac{1}{(z^2-1)^{0.31}} [0,\ T_k(z)] & (k \text{ impair}). \end{cases}$$

Les conditions aux limites sur la surface S_2 sont vérifiées automatiquement quels que soient les coefficients a_k. Utilisant la condition (6.9) nous obtenons l'équation

$$\alpha \sum_{k=0}^{\infty} a_k \Phi_k(z) + \sum_{k=0}^{\infty} a_k u_k(z) = F_1(z), \tag{5.16}$$

où

$$u_k(p) = \int_S \Gamma(p, q)\, \varphi_k(q)\, dS_q,$$

qui sert à déterminer les coefficients a_k.

L'effet de régularisation se fait sentir dans la plus grande mesure sur les valeurs calculées des contraintes de contact. Sans régularisation celles-ci (surtout la contrainte tangentielle) ne se stabilisent pas, à cause des valeurs élevées des coefficients a_k des harmoniques supérieurs.

Il convient cependant de remarquer qu'à mesure qu'on s'éloigne de la surface de contact les contraintes se stabilisent rapidement.

Un autre exemple de problème de contact de classe spéciale sera celui d'un demi-espace élastique soumis à l'action d'une étampe appliquée sans frottement sur la surface S_1, en dehors de l'étampe les contraintes sont supposées nulles. Comme on a noté au § 5 du chapitre III, le problème se ramène à la détermination dans le demi-espace d'une fonction harmonique telle que sa dérivée normale s'annule sur la partie du plan frontière où sont données les contraintes.

On peut résoudre ce problème de la manière suivante. Soit $p(q)$ la pression sur la surface de contact. Intégrant alors (5.24), ch. III, nous obtenons la représentation des déplacements dans tout le demi-espace. L'expression du déplacement normal w prend une forme particulièrement simple sur la frontière :

$$w = \nu_1 \int_{S_1} \frac{p(q)}{r(q', q)}\, dS_q \quad \left(\nu_1 = \frac{1-\nu^2}{\pi E}\right). \tag{5.17}$$

Dans ce cas nous obtenons pour $p(q)$ l'équation intégrale

$$\int_{S'} \frac{p(q)}{r(q', q)}\, dS_q = f(q), \tag{5.18}$$

où $f(q)$ est une fonction donnée, définie par la géométrie de l'étampe. Pour plus de simplicité on a normé $p(q)$. Ecrivons (5.18) sous forme symbolique :

$$Ap = f. \tag{5.18'}$$

L'équation (5.18) est une équation intégrale de Fredholm de première espèce et comme on a noté au § 16 du chapitre I elle est mal posée. On obtient une solution stable avec des méthodes de régularisation usuelles.

Nous allons appliquer un procédé de régularisation plus simple en profitant du caractère spécifique du noyau de cette équation, c'est-à-dire de la positivité des valeurs propres de l'opérateur. Démontrons cette propriété [79].

Soit D_R un domaine découpé du demi-espace par une sphère S_R de rayon R centrée à l'intérieur de S_1 ($R >$ diam S_1). D'après la première formule de Betti (4.26), ch. II, nous avons

$$\int_{D_R} E(u, u)\, d\Omega = \int_{S_1} uT_\nu u\, dS + \int_{S_3} uT_\nu u\, dS \geqslant 0,$$

où S_3 est la surface de la demi-sphère. Dans le second membre ne figure pas l'intégrale prise sur la frontière plane de la demi-sphère en dehors de S_1 puisque l'expression sous l'intégrale y est nulle par hypothèse. Faisant tendre $R \to \infty$ nous obtenons l'inégalité

$$\int_{S_1} uT_\nu u\, dS = \int_D E(u, u)\, d\Omega \geqslant 0, \tag{5.19}$$

d'où le résultat cherché

$$(Ap, p) = (p, Ap) \geqslant 0. \tag{5.20}$$

Le résultat établi permet de construire directement l'opérateur de régularisation, sans avoir à résoudre un problème variationnel pour la fonctionnelle régularisante. Comme on le sait [151], l'instabilité de la solution des équations de première espèce s'explique par le fait que leurs valeurs propres se rapprochent de plus en plus au voisinage du zéro, de sorte que l'opérateur inverse devient infini. Le décalage du spectre d'une quantité positive permet d'éliminer ce défaut. Opérons ce décalage en passant à l'équation

$$\alpha p_\alpha(q') + \int_{S'} \frac{p_z(q)}{r(q', q)}\, dS_q = f(q') \quad (\alpha > 0), \tag{5.21}$$

ce qui correspond à la modification suivante du problème aux limites :

$$\begin{gathered} \alpha(T_z u) + w = f, \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad (q \in S_1), \\ T_\nu u = 0 \quad (q \,\bar{\in}\, S_1). \end{gathered} \tag{5.22}$$

Le choix du paramètre α doit naturellement être déterminé par la précision de la solution de l'équation (5.21).

Sur la figure 80 sont reportées les solutions pour une étampe circulaire plane. La courbe continue est celle de la solution exacte, les petits carrés correspondent à la valeur de $\alpha = 0{,}05$ et à une partition suivant le rayon en 100 parties égales; les petits triangles, à la valeur de $\alpha = 0$ et à une partition en 250 parties (l'intégration suivant l'angle était effectuée sous forme explicite).

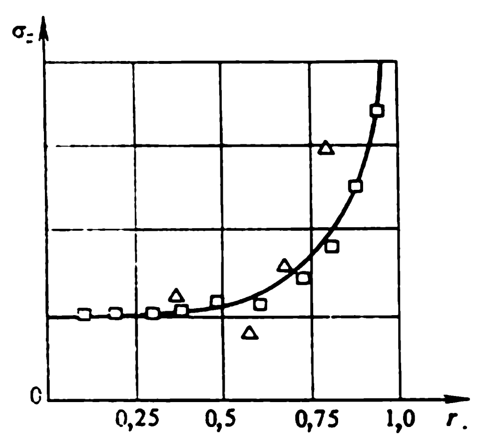


Fig. 80. Contraintes de contact pour une étampe circulaire plane (pour différentes discrétisations et valeurs du paramètre α).

Notons que dans tous ces cas la dépendance entre l'effort et le déplacement de l'étampe s'avère très stable, même sans emploi dans les calculs d'algorithmes de régularisation.

Il s'ensuit des considérations générales (et les exemples cités le confirment) que l'instant auquel se manifeste l'instabilité de la solution dépend de l'algorithme utilisé et de la précision d'approximation de l'opérateur. On a donc tout lieu d'espérer obtenir dans bon nombre de cas des résultats fiables sans utiliser d'algorithmes de régularisation *).

Examinons un procédé de construction de la solution de l'équation intégrale (5.17) quand la surface est proche d'un cercle [26]. Appliquons d'une façon quelconque le domaine S_1 sur un cercle de rayon unité S. Si cette application est réalisée à l'aide des variables complexes z et ζ ($|\zeta| \leqslant 1$), on peut l'écrire sous la forme

$$z = \zeta + \varepsilon\varphi(\zeta), \tag{5.23}$$

où ε est un petit paramètre.

En nouvelles variables l'équation intégrale (5.17) prend la forme

$$\int_S K(\zeta, \zeta')p(\zeta)\,dS = Kp = f(\zeta), \tag{5.24}$$

*) Remarquons que dans [89] sont utilisées des formules de calcul des intégrales de volume de type spécial.

où

$$K(\zeta, \zeta') = \frac{I(\zeta')}{\{\zeta - \zeta' + \varepsilon[\varphi(\zeta) - \varphi(\zeta')]\}^{1/2}\{\bar{\zeta} - \bar{\zeta}' + \varepsilon[\overline{\varphi(\zeta)} - \overline{\varphi(\zeta')}]\}^{1/2}} =$$

$$= \frac{I(\zeta')}{(\zeta - \zeta')^{1/2}(\bar{\zeta} - \bar{\zeta}')^{1/2}(1 + 2\varepsilon|t|\cos\psi + \varepsilon^2|t|^2)^{1/2}}. \quad (5.25)$$

Ici $t = \frac{\varphi(\zeta) - \varphi(\zeta')}{\zeta - \zeta'} = te^{i\psi}$, $I(\zeta)$ est le jacobien de transformation, pour les fonctions $p(z(s))$ et $f(z(s))$ sont conservées les notations précédentes.

Dans le cas où la fonction $\varphi(\zeta)$ est analytique on a

$$I(\zeta) = 1 + \varepsilon[\varphi'(\zeta) + \overline{\varphi'(\zeta)}] + \varepsilon^2\varphi'(\zeta)\overline{\varphi'(\zeta)}.$$

Transformons le noyau (5.25) introduisant la nouvelle fonction

$$K_0(\zeta, \zeta') = \frac{1}{(\zeta - \zeta')^{1/2}(\bar{\zeta} - \bar{\zeta}')^{1/2}} \quad (5.26)$$

et développant les termes restants en série suivant les polynômes de Legendre. Nous obtenons

$$K(\zeta, \zeta') = K_0(\zeta, \zeta')I(\zeta')\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\varepsilon^n|t|^n P_n(\cos\psi)\right]. \quad (5.27)$$

Remarquons que $K_0(\zeta, \zeta')$ est le noyau de l'équation intégrale (5.17) lorsque le domaine S_1 est un cercle. Ecrivons l'équation (5.17) sous forme symbolique :

$$\int_{S_1} K_0(\zeta, \zeta')p(\zeta)\,dS \equiv K_0 p = f. \quad (5.28)$$

Représentons maintenant l'équation (5.24) sous la forme

$$K_0 p = f - (K - K_0)p, \quad (5.29)$$

commode pour sa résolution par la méthode des approximations successives, en partant des relations

$$p_n = p_0 - K_0^{-1}(K - K_0)p_{n-1} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k[K_0^{-1}(K - K_0)]^k p_0, \quad (5.30)$$

où K_0^{-1} est l'opérateur inverse de K_0 et p_0 la solution d'une étampe circulaire.

En dernier lieu,pour déterminer la pression de contact il faut passer de la fonction $p(\zeta)$ à la fonction $p(z)$.

Au § 8 du chapitre I on a mentionné toute une classe de problèmes aux limites mixtes pour l'équation de Laplace dans

le cas d'un demi-espace élastique avec une ligne de séparation des conditions aux limites menée le long d'une ellipse, pour lesquels la solution peut être construite sous forme explicite. On donne à l'intérieur de l'ellipse la fonction u, polynôme de degré n, et l'on suppose qu'à l'extérieur de l'ellipse, la dérivée normale est nulle. L'expression de la dérivée normale sur la surface elliptique se représente dans ce cas sous la forme

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\Phi_n(x, y)}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}, \tag{5.31}$$

où $\Phi_n(x, y) = \sum\limits_{i,j}^{i+j \leq n} c_{ij} x^i y^j$ est un polynôme de même degré ; a, b sont les demi-axes de l'ellipse.

Ce résultat peut être utilisé pour la résolution du problème de contact relatif à une étampe elliptique appliquée sans frottement. En effet, on a entre les déplacements $w(x, y)$ et les contraintes de contact $p(x, y)$ la relation

$$w(x, y) = \int\limits_S \frac{p(x_1, y_1)}{\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}} dx_1 dy_1. \tag{5.32}$$

Pour le cas considéré nous obtenons l'équation fonctionnelle

$$\gamma + \alpha x + \beta y - f_n(x, y) =$$
$$= \int\limits_S \frac{\Phi_n(x_1, y_1)\, dx_1\, dy_1}{\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}\sqrt{1 - \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2}}}, \tag{5.33}$$

où $f_n(x, y)$ est l'équation ayant la forme d'un polynôme de la surface de l'étampe ; γ, α, β sont des constantes déterminant son mouvement de solide *). Cette équation permet justement de déterminer les coefficients du polynôme $\Phi_n(x, y)$. D'après la position mécanique du problème, sont supposés donnés le vecteur résultant des efforts P s'exerçant sur l'étampe (constitué d'une seule composante P_z puisque les composantes tangentielles sont absentes) et son point d'application (x_0, y_0). Donc sont données trois grandeurs scalaires, ce qui équivaut à donner trois constantes α, β et γ. Dans ce cas les caractéristiques de force se déterminent par intégration de la contrainte $p(x, y)$. Ecrivons les expres-

*) Les intégrales de (5.33) se calculent assez facilement lorsque le degré du polynôme est deux (autrement dit, lorsque la surface de l'étampe est un paraboloïde). Les termes linéaires sont supposés absents dans l'expression de $f_n(x, y)$, les coefficients α, β, γ en tenant automatiquement compte.

sions de toutes les intégrales figurant dans (5.33) d'après [25] pour $n = 2$:

$$\int\limits_S \frac{dx_1\,dy_1}{\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}\sqrt{1-\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}}} =$$

$$= \int\limits_S K(x, y, x_1, y_1)\,dx_1\,dy_1 = 2\pi a k' F(k) = d_{00}^{00},$$

$$\int\limits_S K(x, y, x_1, y_1)x_1\,dx_1\,dy_1 = \frac{2\pi a k'}{k^2}[F(k)-E(k)]x = d_{10}^{10}x,$$

$$\int\limits_S K(x, y, x_1, y_1)y_1\,dx_1\,dy_1 = \frac{2\pi a k'}{k^2}[E(k)-k'^2F(k)]y = d_{01}^{01}y,$$

$$\int\limits_S K(x, y, x_1, y_1)x_1^2\,dx_1\,dy_1 = \frac{\pi a^3 k'}{k^2}[E(k)-k'^2F(k)] +$$

$$+\frac{\pi a k'}{k^2}[2F(k)-(2+k^2)E(k)]x^2 +$$

$$+\frac{\pi a k'}{k^4}[2E(k)-(2-k^2)F(k)]y^2 = d_{20}^{00} + d_{20}^{20}x^2 + d_{20}^{02}y^2, \tag{5.34}$$

$$\int\limits_S K(x, y, x_1, y_1)y_1^2\,dx_1\,dy_1 = \frac{\pi a^3 k'^3}{k^2}[F(k)-E(k)] +$$

$$+\frac{\pi a k'^3}{k^4}[2E(k)-(2-k^2)F(k)]x^2 + \frac{\pi a k'}{k^4}[2k^4F(k) -$$

$$-(2-3k^2)E(k)]y^2 = d_{02}^{00} + d_{02}^{20}x^2 + d_{02}^{02}y^2,$$

$$\int\limits_S K(x, y, x_1, y_1)x_1y_1\,dx_1\,dy_1 =$$

$$= \frac{2\pi a k'}{k^4}[(2-k^2)E(k)-2k'^2F(k)] = d_{11}^{11}xy.$$

Ici $F(k)$ et $E(k)$ sont des fonctions elliptiques de première et de deuxième espèce, k l'excentricité de l'ellipse, $k' = \sqrt{1-k^2}$. Pour ce qui est des notations d_{ji}^{kl}, leur signification est évidente.

Ainsi, la résolution du problème de contact (pour $n \leqslant 2$) se ramène à l'étape finale au système d'équations

$$
\begin{gathered}
d_{00}^{00} c_{00} + d_{20}^{00} c_{20} + d_{02}^{00} c_{02} = b_{00} = -\gamma, \\
d_{20}^{20} c_{20} + d_{02}^{20} c_{02} = b_{20}, \quad d_{20}^{02} c_{20} + d_{02}^{02} c_{02} = b_{02}, \\
d_{10}^{10} c_{10} = b_{10} = -\alpha, \quad d_{10}^{01} c_{01} = b_{01} = -\beta, \\
d_{11}^{11} c_{11} = b_{11}.
\end{gathered} \tag{5.35}
$$

Si l'on passe à l'effort P_z et à la coordonnée du point d'application de la force (x_0, y_0), il faut faire appel en outre à l'équation

$$
\begin{gathered}
4\pi^2 mGa^2k'(c_{00} + 1/3a^2c_{20} + 1/3a^2k'^2c_{02}) = -(m-1)P_z, \\
4/3\pi^2a^4mGk'c_{10} = -(m-1)x_0P_z, \\
4/3\pi^2a^4mGk'^3c_{01} = -(m-1)y_0P_z \quad \left(m = \frac{1}{\nu}\right).
\end{gathered} \tag{5.36}
$$

Dans le cas d'une étampe plane ($b_{20} = b_{02} = b_{11} = 0$) le système (5.35) admet une solution simple. Donnons les résultats définitifs

$$
\begin{gathered}
p(x, y) = -\frac{P_z}{2\pi a^2k'}\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{-1/2}\left(1 + \frac{3y_0y}{b^2} + \frac{3x_0x}{a^2}\right), \\
\gamma = \frac{(m-1)P_zF(k)}{2\pi maG}, \quad \alpha = \frac{3(m-1)x_0P_z[F(k) - E(k)]}{2\pi ma^3k^2G}, \\
\beta = \frac{3(m-1)y_0P_z[E(k) - k'^2F(k)]}{2\pi ma^3Gk^2k'^2}.
\end{gathered} \tag{5.37}
$$

Signalons également le cas d'une étampe parabolique ($b_{11} = 0$, $b_{20} > 0$, $b_{02} > 0$) avec la force résultante appliquée au point $x_0 = y_0 = 0$. La solution se trouve aussi de façon très simple, car le système (5.35) se ramène à un système du troisième (mais effectivement du deuxième) ordre

$$
\begin{gathered}
d_{00}^{00} c_{00} + d_{20}^{00} c_{20} + d_{02}^{00} c_{02} = -\gamma, \\
d_{20}^{20} c_{20} + d_{02}^{20} c_{02} = b_{20}, \\
d_{20}^{02} c_{20} + d_{02}^{02} c_{02} = b_{02}.
\end{gathered} \tag{5.38}
$$

Les formules précédentes permettent d'examiner le problème concernant l'enfoncement d'une étampe de surface non délimitée *a priori* par un contour fixe, mais déterminée au cours de la résolution du problème en fonction de l'effort appliqué. Le cas

général ne peut être considéré ici *), car pour l'appareil utilisé il est essentiel que la surface de contact soit une ellipse. L'unique possibilité d'obtenir la solution à l'aide de cette méthode est de trouver pour quels paramètres la solution cherchée sera telle que le polynôme $\Phi_n(x, y)$ puisse être représenté sous la forme du produit de la fonction $(1 - x^2/a^2 - y^2/b^2)$ par un certain facteur. Le problème posé possède plusieurs solutions. Considérons l'une d'elles, trouvée par Hertz pour le cas où le polynôme complémentaire est une constante. L'étampe est alors un paraboloïde (b_{20}, $b_{02} > 0$, $b_{11} = 0$). Portant dans (5.35) les valeurs $c_{00} = c$, $c_{20} = -c/a^2$, $c_{02} = -c/b^2$, nous nous assurons que le système (5.38) est compatible pour certaines valeurs de l'excentricité. Pour l'excentricité d'une surface elliptique de contact on a l'équation transcendante

$$\frac{k^2}{(1 - k^2)F(k)/E(k) - 1} = \frac{b_{20} + b_{02}}{b_{02}}. \tag{5.39}$$

La longueur des demi-axes s'exprime en fonction de l'effort P_z de la façon suivante:

$$a = \sqrt{\frac{6(m-1)P_z[F(k) - E(k)]}{\pi m G k^2 b_{20}}}, \quad b = \frac{3P_z(m-1)F(k)}{4\pi a m G}. \tag{5.40}$$

Rapportons maintenant l'expression de la pression de contact

$$p(x, y) = -\frac{3P_z}{2\pi a^2 k^2}\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}. \tag{5.41}$$

Remarquons que puisque l'excentricité ne dépend pas de la grandeur de l'effort, les contours frontières (pour différents efforts) représenteront alors une famille d'ellipses homofocales. Les résultats obtenus plus haut montrent que, comme pour le problème plan, la contrainte aux points frontières s'avère ou bien illimitée, ou bien nulle.

Etudions le problème de la compression de deux corps élastiques, lorsque la surface de contact est petite devant leurs dimensions, de sorte qu'on peut en première approximation envisager un problème de la compression de deux demi-espaces ($z > 0$, $z < 0$). Soient les équations des surfaces entrant en contact

$$z_1 = f_1(x, y), \quad z_2 = f_2(x, y).$$

Nous admettrons que les points ayant les mêmes coordonnées x et y entrent en contact lors de la compression **). Dans ce cas, les conditions sur les déplacements $w_1(x, y)$ et $w_2(x, y)$ peuvent être

---

*) Certaines considérations concernant ce cas sont exposées au § 1 du chapitre VIII.

**) Cette hypothèse équivaut à négliger les déplacements dans le plan tangentiel.

données de la façon suivante :

$$w_1 + w_2 = \delta - f_1(x, y) - f_2(x, y) = f(x, y), \qquad (5.42)$$

où δ caractérise le rapprochement des corps.

Avec les restrictions faites, pour établir le lien qui existe entre la pression de contact $p(x, y)$ et les déplacements, on se servira utilement de la relation (5.17) qu'on applique à chacun des demi-espaces :

$$w_1(x, y) = \frac{1-\nu_1}{2\pi G_1}\int\limits_S \frac{p(x_1, y_1)}{\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}}\,dx_1\,dy_1 = \frac{\theta_1}{2\pi}\int\limits_S \frac{p(x_1, y_1)}{\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}}\,dx_1\,dy_1, \qquad (5.43)$$

$$w_2(x, y) = \frac{\theta_2}{2\pi}\int\limits_S \frac{p(x_1, y_1)}{\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}}\,dx_1\,dy_1. \qquad (5.44)$$

De (5.42) nous tirons alors l'égalité

$$\frac{\theta_1+\theta_2}{2\pi}\int\limits_S \frac{p(x_1, y_1)}{\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}}\,dx_1\,dy_1 = f(x, y), \qquad (5.45)$$

i.e. nous retrouvons l'équation d'une étampe rigide enfoncée dans le demi-espace, ce qui permet d'utiliser les résultats précédents.

La solution proposée pour une étampe elliptique se simplifie considérablement quand l'étampe est circulaire. Mais comme on a dans ce cas l'expression de la fonction de Green (cf. § 8, ch.I), la solution peut alors être obtenue directement sans imposer à la surface de l'étampe les exigences formulées plus haut.

Examinons un problème particulier à symétrie axiale [13]. Soit une boule élastique de rayon R reposant sans frottement sur une base sphérique dont la forme est définie par l'équation

$$r = R[1+\rho(\theta)] \quad (\rho(0)=0,\ 0 \leqslant \theta < \gamma, \quad \rho(\theta) \ll 1). \qquad (5.46)$$

Sur la partie $\gamma \leqslant \theta \leqslant \pi$ de la surface est appliquée une charge normale $N(\theta)$. Pour résoudre ce problème, utilisons les formules (1.30) du chapitre IV, qui traduisent la dépendance entre les contraintes normales appliquées à la boule et les déplacements de sa surface.

Nous considérerons en qualité de fonction inconnue la pression de contact $\sigma_r(\theta)$ recherchée. Ecrivons la condition nécessaire

$$2\pi R^2\int\limits_0^{\gamma} \sigma_r(\alpha)\sin\alpha\cos\alpha\,d\alpha = -P_z \quad (P_z > 0), \qquad (5.47)$$

où P_z est la résultante des forces extérieures.

De la condition (5.46) on déduit la condition aux limites en déplacements

$$u_r = R[-a\cos\theta + \rho(\theta)], \tag{5.48}$$

où a est le rapprochement cherché de la base avec le centre de la boule.

On tire alors de la première formule (1.27), ch. IV, l'équation intégrale suivante pour la pression de contact $\sigma_r(\theta)$:

$$\frac{R}{2\pi\mu}\int_0^{\gamma}\sigma_r(\alpha)H_r(1,\ \theta,\ \alpha)\sin\alpha\,d\alpha = U(\theta) \quad (0 < \theta < \gamma), \tag{5.49}$$

où

$$U(\theta) = R\left[\rho(\theta) - a\cos\theta - \frac{1}{2\pi G}\int_{\gamma}^{\pi}N(\alpha)H_r(1,\ \theta,\ \alpha)\sin\alpha\,d\alpha\right].$$

Faisons un changement de variables

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \varepsilon x, \quad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \varepsilon t, \quad \varepsilon = \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$$

et introduisons les notations

$$\sigma^0(x) = \sigma_r(2\operatorname{arctg}\varepsilon x),$$

$$U^0(x) = U(2\operatorname{arctg}\varepsilon x),$$

$$U^0(y) \equiv U^0(y,\ x,\ t) = U(y,\ 2\operatorname{arc\,tg}\varepsilon x,\ 2\operatorname{arc\,tg}\varepsilon t),$$

$$q(x) = \frac{4\varepsilon^2\sigma^0(x)}{(1+\varepsilon^2x^2)^{3/2}\mu},$$

$$w(x) = \frac{2U^0(x)}{R(1+\varepsilon^2x^2)^{1/2}}, \quad \nu_1 = \frac{1-\nu}{2\pi},$$

$$S(x,\ t) = \frac{t}{\sqrt{(1+\varepsilon^2x^2)(1+\varepsilon^2t^2)}}\left\{\frac{1}{2}\cdot\frac{1-2\nu}{1+\nu} - \right.$$

$$\left. -\,2(1-\nu)\left[1+\frac{(1-\varepsilon^2x^2)(1-\varepsilon^2t^2)}{(1+\varepsilon^2x^2)(1+\varepsilon^2t^2)}\right] + \frac{1}{\pi}\operatorname{Re}\int_0^1\left(\frac{P+Q}{y^{1+n_1}}+\frac{1}{y^2}\right)U^0(y)\,dy\right\}.$$

L'équation (5.49) prend alors la forme

$$\int_0^1 q(t)\left[\frac{4t}{x+t}K\left(\frac{2\sqrt{xt}}{x+t}\right) + \frac{\varepsilon}{\nu_1}S(x,\ t)\right]dt = \frac{\varepsilon}{\nu_1}w(x) \tag{5.49'}$$

$$(0 < x < 1).$$

A son tour l'égalité (5.47) devient

$$\int_0^1 q(t)\frac{(1-\varepsilon^2t^2)t}{(1+\varepsilon^2t^2)^{3/2}}\,dt = -\frac{P_z}{2\pi R^2\mu}. \qquad (5.47')$$

Notons que le problème de contact à symétrie axiale pour le demi-espace peut être ramené à une équation intégrale

$$\int_0^1 q(t)\frac{4t}{x+t}K\left(\frac{2\sqrt{xt}}{x+t}\right)dt = f(x) \quad (0 < x < 1). \qquad (5.50)$$

Comme on le fait dans [81], donnons sa solution (8.11), ch. I, sous la forme

$$q(x) = \frac{c}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi^2}\times$$

$$\times\int_0^{\pi/2} d\psi\int_0^{\pi/2}\Delta f(\sqrt{1-(1-x^2)\sin^2\varphi}\sin\alpha)\sin\psi\sin\alpha\,d\alpha, \qquad (5.51)$$

où

$$\Delta f(t) = \frac{1}{t}f'(t) + f''(t), \quad c = \frac{1}{\pi^2}\left[f(0) + \int_0^1\frac{f'(t)dt}{\sqrt{1-t^2}}\right].$$

On peut montrer que la solution (5.51) se laisse représenter aussi sous la forme

$$q(x) = \frac{c}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\pi^2}\int_0^1\Delta f(t)L(x, t)\,dt, \qquad (5.51')$$

où

$$L(x, t) = \frac{t}{x+t}K\left(\frac{2\sqrt{xt}}{x+t}\right) - F\left(\frac{x}{t}, t\right).$$

Considérant l'intégrale de (5.51') comme opérateur, appliquons celui-ci à gauche sur (5.49). Ceci nous donne l'équation équivalente

$$q(x) - \frac{\varepsilon}{\nu_1\pi^2}\int_0^1 q(t)B(x, t)\,dt =$$

$$= \frac{c}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{\varepsilon}{\nu_1\pi^2}\int_0^1\Delta w(t)L(x, t)\,dt \quad (0 < x < 1), \qquad (5.52)$$

où

$$B(x, t) = \int_0^1 \left[\frac{1}{z} S_z'(z, t) + S_{zz}''(z, t) \right] L(x, z)\, dz.$$

Ainsi, nous avons obtenu pour $q(x)$ une équation intégrale de deuxième espèce. Pour la résoudre on aura recours à la condition (5.47').

§ 6. Problèmes pour les corps présentant des coupures

Soit dans l'espace occupé par le milieu élastique une surface régulière non fermée S délimitée par un contour régulier L; les faces de S seront désignées par S^+ et S^- (conformément au sens positif de la normale extérieure). On donne sur les faces S^+ et S^- les contraintes *)

$$\lim_{p \to q^+} \boldsymbol{T}_\nu \boldsymbol{u}(p) = \boldsymbol{F}^+(q^+), \tag{6.1}$$

$$\lim_{p \to q^-} \boldsymbol{T}_\nu \boldsymbol{u}(p) = \boldsymbol{F}^-(q^-). \tag{6.2}$$

Les contraintes à l'infini sont supposées nulles (si elles ne le sont pas, il convient alors par superposition de la solution triviale de passer à une condition homogène). Les restrictions que l'on doit imposer aux fonctions $\boldsymbol{F}^+(q^+)$ et $\boldsymbol{F}^-(q^-)$ ont pour but d'assurer l'applicabilité de l'appareil utilisé.

Ce problème appartient à la classe de problèmes dégénérés, non embrassés par la théorie exposée au §§ 1 à 3. Ceci est dû non seulement à la présence du contour L, mais principalement au fait que le problème I$^+$ auxiliaire, auquel on a recours pour construire la théorie du problème II$^-$ dont le problème considéré est un cas particulier, s'avère être posé pour un domaine dégénérant en surface, ce qui est dénué de sens.

Simplifions préalablement la position du problème. Si $\boldsymbol{F}^+(q) \neq \neq \boldsymbol{F}^-(q)$, nous formons alors un potentiel de couche simple $\boldsymbol{V}(p, \boldsymbol{f})$ de densité $\boldsymbol{f} = 0{,}25(\boldsymbol{F}^+ - \boldsymbol{F}^-)$. En vertu des formules (1.23) (qu'on suppose applicables) nous obtenons que les déplacements $\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{V}(p, \boldsymbol{f})$ vérifient les conditions aux limites, les mêmes des deux côtés. En effet,

$$\boldsymbol{T}_\nu^+ \boldsymbol{u}' = \boldsymbol{T}_\nu^+ \boldsymbol{u} - \boldsymbol{T}_\nu^+ \boldsymbol{V} = \boldsymbol{F}^+ - 0{,}5(\boldsymbol{F}^+ - \boldsymbol{F}^-) =$$
$$= 0{,}5(\boldsymbol{F}^+ + \boldsymbol{F}^-) = \boldsymbol{T}_\nu^- \boldsymbol{u} - \boldsymbol{T}_\nu^- \boldsymbol{V} = \boldsymbol{F}^- + 0{,}5(\boldsymbol{F}^+ - \boldsymbol{F}^-). \tag{6.3}$$

*) La donnée de conditions d'autre type présente moins d'intérêt.

Omettons ensuite le cran sur u et, admettant l'identité des fonctions $F^+(q)$ et $F^-(q)$ à la limite, considérons les conditions (6.1) et (6.2) comme une condition unique.

Introduisons en considération le potentiel de couche double $W(p, \varphi)$, φ étant égale à la moitié du saut des déplacements sur la coupure. La différence $u' = u - W(p, \varphi)$ représentera alors des déplacements continus au voisinage de la coupure aussi, en même temps que le vecteur des contraintes. Appliquant alors la généralisation du théorème de Stahl en théorie de l'élasticité *) [108], nous obtenons que le déplacement u' est identiquement nul, en d'autres termes que le déplacement cherché u se représente sous la forme d'un potentiel de couche double $W(p, \varphi)$.

Le résultat établi permet d'expliquer la divergence de la méthode des approximations successives avec l'accroissement de l'indice j. En effet, lors du passage à la limite considéré plus haut le potentiel de couche simple s'avère donné sur une surface bilatérale. D'autre part, comme nous venons d'établir, la solution se représente sous la forme d'un potentiel de couche double donné sur une surface unilatérale. Les solutions devant être les mêmes, il en découle que le passage d'un potentiel à l'autre n'est possible que lorsque la densité du potentiel de couche simple devient infinie.

Exigeons maintenant la vérification de l'une des conditions (6.1) ou (6.2). Nous arriverons alors à l'équation fonctionnelle fondamentale

$$\lim_{p\to q} T_\nu W(p, \varphi) = \lim_{p\to q} T_\nu \int_S \Gamma_2(p, q')\varphi(q')\,dS_{q'} = F(q). \qquad (6.4)$$

Passons à l'exposé des schémas de calcul servant à la résolution de l'équation (6.4). Nous partirons naturellement d'une discrétisation quelconque de la surface S en petits domaines S_j $(j=1, 2, \ldots, N)$ et d'une représentation constante par morceaux de la fonction $\varphi(q)$, reportée aux points centraux des domaines q_j, que nous appellerons comme auparavant points d'appui. Nous n'exigerons la vérification des équations (6.4) qu'aux points d'appui.

La difficulté de la réalisation directe de l'équation (6.4) réside dans le fait qu'il est impossible de la ramener à une équation intégrale et par conséquent de réduire la procédure de résolution approchée au calcul des intégrales de volume. Décrivons quelques procédés de construction d'algorithmes approchés.

*) Le théorème de Stahl, démontré pour la première fois pour les fonctions harmoniques (cf. [146]), affirme que deux fonctions harmoniques, égales sur une partie quelconque de la surface et ayant des valeurs égales de leurs dérivées normales, sont identiques.

Choisissons un point d'appui quelconque, disons q_j, et construisons en celui-ci l'analogue discret de l'équation (6.4), partant des valeurs conventionnellement données de $\varphi(q_j)$ en tous les points d'appui q_j ($\varphi(q_j) = \varphi_j$). Il faut dire que le calcul des termes des sommes intégrales correspondant aux domaines S_j ($j \neq j_0$) est très simple. Un intervertissement de l'ordre de différentiation et d'intégration étant possible dans l'expression des contraintes, nous obtenons l'intégrale

$$\int\limits_{S-S_{j_0}} T_\nu \Gamma_2(q_{j_0}, q)\varphi(q)\, dS_q. \qquad (6.5)$$

Afin de conserver la précision il faut dans les domaines S_j situés à proximité immédiate du point j_0 opérer une subdivision de la surface ; la densité dans ces domaines sera déterminée par interpolation à partir des valeurs de φ_j adoptées au début.

L'application à l'intégrale (6.5) d'une formule d'intégration de volumes conduit à une somme de la forme

$$\sum_{j=1}^{N} \alpha'_{j_0,j}\varphi_j. \qquad (6.6)$$

Ici peut figurer également le terme en φ_{j_0} s'il a fallu effectuer une subdivision, car la valeur de φ_{j_0} a dû alors être utilisée pour l'interpolation de la densité dans les domaines complémentaires attenant au point j_0. Il est évident que $\alpha'_{j_0,j}$ est une matrice du troisième ordre.

Nombre de procédés existent pour calculer le terme correspondant au domaine S_{j_0} [106, 166, 115]. Dans [115] par exemple on propose d'introduire en considération les points situés dans le corps même, à proximité immédiate du point q_{j_0} (le plus commode est de les prendre sur la normale à la surface). Nous les désignerons par $p^l_{j_0}$, le paramètre l caractérisant la distance au point q_{j_0}. On calculera en ces points les composantes des contraintes (à partir de la densité donnée uniquement sur S_{j_0}), effectuant ensuite une extrapolation au point q_{j_0}. Les valeurs trouvées des contraintes sont à porter dans la somme (6.6). Nous obtenons de la sorte l'analogue discret de l'équation (6.4) au point j_0 :

$$\sum_{j=1}^{N} \alpha_{j_0,j}\varphi_j = F(q_{j_0}). \qquad (6.7)$$

Pour assurer la précision indispensable du calcul des contraintes pour de petites valeurs de l il y a lieu d'effectuer une subdivision du domaine S_{j_0}. Si, par ailleurs, on a recours à une interpolation de la fonction $\varphi(q)$, alors dans la somme (6.7) non seulement le coefficient α_{j_0, j_0} sera différent du coefficient α'_{j_0, j_0}, mais encore plusieurs coefficients correspondant aux domaines S_j attenant au point j_0.

Dans le tableau 14 sont résumés les résultats des calculs effectués pour un exemple modèle. Sur une surface carrée on a donné une fonction vectorielle de grandeur constante (unité) dirigée suivant la normale à la surface. On a formé un potentiel de couche double avec cette fonction pour densité et on a calculé, aux points situés sur la normale au centre du carré et à différentes distances de celui-ci, la composante σ_z (le plan xOy était supposé se confondre avec le plan du carré). Le calcul des contraintes a nécessité d'effectuer une subdivision du domaine en n^2 petits carrés identiques.

Tableau 14

n	0,4	0,2	0,15	0,1	0,05
30	1,78139	1,66073	1,63240	1,60930	0,51301
60	1,78159	1,66085	1,63255	1,61014	1,57513
120	1,78159	1,66093	1,63260	1,61023	1,59591
180	1,78159	1,66093	1,63260	1,61023	1,59615

Nous voyons que par un choix approprié du nombre n on peut atteindre des valeurs stables des contraintes aux points très proches de la surface.

Le tableau 15 donne les valeurs des contraintes obtenues par extrapolation (et effectivement la valeur du coefficient α_{j_0, j_0}) pour différents groupes de points utilisés dans le calcul.

Tableau 15

n \ l	0,4; 0,3; 0,2	0,4; 0,3; 0,2; 0,1	0,4; 0,3; 0,2; 0,1; 0,05
30	1,55187	1,59233	—
60	1,55195	1,59315	1,54165
120	1,55200	1,59388	1,59138
180	—	—	1,59205

On voit que le processus d'extrapolation est stable et sa précision peut être contrôlée.

Rapportons un procédé de calcul du coefficient α_{j_0, j_0} nécessitant une polygonalisation préliminaire de la surface. Supposant

comme auparavant la densité constante à l'intérieur de chaque domaine S_j (maintenant polygone), on peut montrer que les déplacements et les contraintes s'expriment sous forme explicite, ce qui conduit de même à un analogue discret de l'équation (6.4) au point d'appui considéré. Lorsque nous aurons épuisé tous les points d'appui, nous arriverons à un système d'équations algébriques, analogue discret de l'équation générale (6.4) :

$$\sum_{k=1}^{N} \alpha_{jk}\varphi_k = F(q_j) \quad (j = 1, 2, \ldots, N). \tag{6.8}$$

Notons un procédé permettant d'élever la précision sans avoir recours à une discrétisation fine de la surface au voisinage de son bord (normalement indispensable, puisque la dérivée des déplacements prise suivant la normale au bord de la coupure croît indéfiniment). Il faut pour cela introduire dans la représentation de la fonction φ un facteur (en coordonnées locales dans le plan normal au bord de la coupure) défini par la représentation asymptotique connue des déplacements au voisinage d'un point anguleux (cf. § 8, ch. III).

Envisageons un procédé de construction d'un analogue discret de l'équation (6.4) proposé dans [166]. C'est au fond une généralisation de la méthode exposée dans [1] qu'on utilise pour construire les schémas de calcul pour des problèmes fondamentaux. On effectue une discrétisation de la surface de la coupure en polygones plans, et l'on donne sur chaque polygone une fonction vectorielle constante qu'on considère comme la densité d'un potentiel de couche double. Dans ce cas tous les potentiels s'expriment par des fonctions élémentaires, ce qui conduit à un système du type (6.7).

Si les potentiels sont recherchés à partir de la solution obtenue pour une force appliquée à l'intérieur du demi-espace (solution de Mindlin), on obtient alors la solution dans le cas des coupures dans le demi-espace.

Approchons les problèmes considérés d'un point de vue différent. Soit un ensemble de surfaces S_j telles que $D_j^+ \supset D_{j+1}^+$ et qui tendent à la limite vers une surface bilatérale S. Donnant sur S_j des conditions aux limites qu'on obtient par un prolongement suffisamment régulier des conditions aux limites données sur S à l'intérieur du domaine correspondant, on obtient pour chacun des domaines D_j^- un deuxième problème extérieur. Ces problèmes ne sont plus dégénérés. Ayant résolu ces problèmes par telle ou telle méthode, on obtient à la limite pour $j \to \infty$ une solution qu'on peut traiter comme une solution pour l'espace muni d'une coupure. Si l'on adopte pour la construction de ces solutions la méthode du potentiel (équation (2.3)), la convergence des appro-

ximations successives s'empire avec la croissance de j, de sorte qu'on obtient à la limite une série divergente. Ce fait sera expliqué un peu plus loin. Les mêmes difficultés sont rencontrées avec l'équation (2.5) : dans ce cas c'est le second membre qui tend à la limite vers zéro. Il est tout de même possible de se faire une idée exacte de la concentration des contraintes au voisinage du bord de la coupure, en partant de l'analyse des solutions obtenues pour des cavités suffisamment minces. Les considérations que nous venons d'exposer ont reçu un développement dans [67]. On est parti de la solution d'un problème pour un plan présentant une coupure [95] soumise à une extension triaxiale. Les contraintes normales sur le prolongement de la coupure sont

$$\sigma = \frac{(l + x)}{\sqrt{x^3 + 2xl}}, \tag{6.9}$$

où l est la longueur de la coupure. Multiplions les deux membres de (6.9) par $\sqrt{x}$ et développons en série suivant x, en ne retenant que deux termes :

$$\sqrt{x}\sigma \approx C_1 + C_2 x. \tag{6.10}$$

La fonction (6.10) approche assez bien la solution exacte, de sorte que son extrapolation sur le bord de la coupure fournit une valeur suffisamment exacte du coefficient d'intensité des contraintes.

Puis on a considéré la solution d'un problème pour un plan comportant une ouverture elliptique de demi-axes a et b. Les contraintes normales sur le prolongement du demi grand-axe sont

$$\sigma = \frac{x(x^2 - a^2 + 2b^2)}{(x^2 - a^2 + b^2)^{3/2}}. \tag{6.11}$$

Pour $a/b > 10$ les valeurs des contraintes fournies par les formules (6.9) et (6.11) ne diffèrent que très peu pour $x > b$. Il est donc possible de déterminer la valeur du coefficient d'intensité des contraintes dans le problème pour un plan avec une coupure par une approximation linéaire (puis une extrapolation) du produit $\sqrt{x}\sigma$ qu'on obtient dans le problème du corps avec une cavité.

De nombreux calculs montrent qu'à une certaine distance du bord de la cavité (à peu près égale à son épaisseur) la fonction $\sqrt{x}\sigma$ se laisse suffisamment bien approcher par une droite. On montre sur la figure 81 un demi-plan muni d'une coupure latérale formée par deux segments de droite et un demi-cercle. L'épaisseur de la coupure était égale à 0,1 de sa longueur. Les contraintes σ_∞ s'exercent à l'infini. On voit que dans l'intervalle $0{,}2 < x/l < 0{,}5$ l'approximation linéaire est satisfaisante. On a obtenu

pour le coefficient d'intensité des contraintes une valeur 4,40, ce qui diffère de 0,5% de la solution connue.

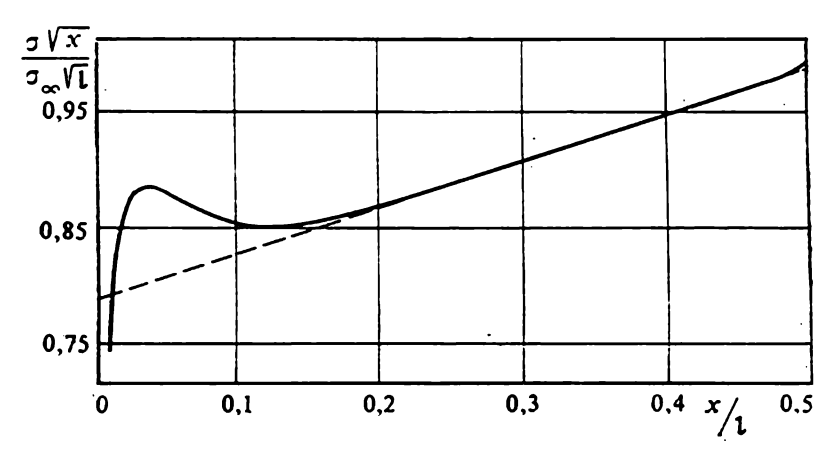


Fig. 81. Fonction $\sigma\sqrt{x}$.

Pour obtenir des valeurs fiables du coefficient d'intensité des contraintes on a à résoudre des problèmes auxiliaires pour des cavités très minces, ce qui suscite nombre de difficultés. Dans l'article cité [67], où l'on a eu recours à l'appareil des équations intégrales singulières, il s'est avéré nécessaire d'effectuer un grand nombre d'itérations. Afin de réduire le volume des calculs, il a été proposé de mettre à profit cette circonstance qu'à partir d'un certain numéro, les itérations se comportent comme des termes d'une progression géométrique (d'une même raison pour toute la surface). Ceci permet de calculer la somme des itérations analytiquement.

§ 7. Corps composés. Corps homogènes par morceaux

Faisons l'étude des problèmes de la théorie de l'élasticité pour des corps composés. On admet l'existence dans le corps de surfaces (fermées ou non) sur lesquelles le vecteur déplacement subit une discontinuité. Des sauts se manifestent lors de transformations de phase ou lorsque le corps est « monté » de différentes parties telles que les dimensions des cavités et des pièces à y insérer sont légèrement différentes. Dans ce dernier cas on doit faire telles ou telles hypothèses sur le comportement des surfaces en contact au cours de leur déformation simultanée. L'hypothèse la plus simple au point de vue des calculs est celle d'adhérence complète. On doit supposer alors que le saut du vecteur déplacement conserve sa valeur. On peut supposer également qu'il se

produit un glissement. Dans ce cas il faut se donner la valeur du coefficient de frottement. Si le frottement est nul, on admettra que les composantes tangentielles des contraintes sont nulles et que le saut de la composante normale des déplacements est connu. Le problème devient extrêmement complexe si l'on suppose qu'au cours de la déformation il y a décollement par endroits (ces endroits devant être déterminés). Pour les transformations de phase on admettra naturellement qu'il y a adhérence complète. Dans tous les cas on doit supposer que le vecteur contrainte ne subit pas de saut.

Nous allons traiter le cas d'adhérence complète des corps en contact. Soit D_0 un domaine délimité de l'extérieur par la surface S_0 et de l'intérieur par la surface S, et D_1 un domaine délimité de l'extérieur par la surface S et de l'intérieur par la surface S_1. La surface S est soumise aux conditions

$$u_1(q) - u_0(q) = F(q), \tag{7.1}$$

$$T_n u_1(q) = T_n u_0(q). \tag{7.2}$$

Ici $F(q)$ est le saut du vecteur déplacement (serrage) (cf. les conditions analogues (6.2) et (6.3), chapitre V, pour le problème plan). Nous envisagerons tout d'abord le cas de milieux identiques.

Profitant des propriétés du potentiel de couche double $W(p)$ (1.21) et (1.24) on peut passer directement au problème auxiliaire. On devra prendre la densité du potentiel égale à $1/2F(q)$. Définissant les déplacements dans le domaine D_0 par

$$u(p) = u_0(p) - W(p, 1/2F(q)) \tag{7.3}$$

et dans le domaine D_1 par

$$u(p) = u_1(p) - W(p, 1/2F(q)) \tag{7.4}$$

nous obtenons les déplacements vérifiant les équations de Lamé dans $D = D_0 \cup D_1$, mais pour de nouvelles conditions aux limites.

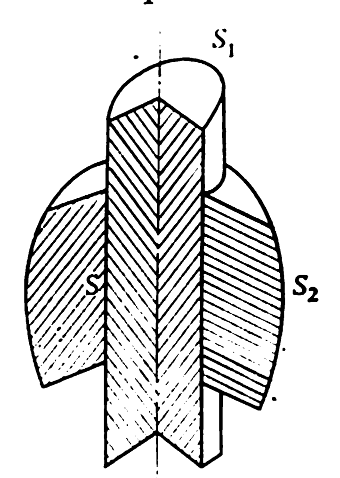


Fig. 82. Corps composé.

Il est évident qu'on peut procéder de même dans le cas de plusieurs inclusions et même dans le cas où certaines inclusions représentent des corps composés.

Le cas où la surface de contact émerge à la surface extérieure exige une étude spéciale. Dans le cas le plus simple (représenté sur la figure 82) l'un des domaines est délimité par la surface $S_1 \cup S$, l'autre par la surface $S_2 \cup S$ (S étant la surface de contact). Il est clair que le

potentiel de couche double

$$W(p) = \frac{1}{2} \int_S \Gamma_2(p, q) F(q) \tag{7.5}$$

conduit également à un problème pour le domaine délimité par la surface $S_1 \cup S_2$. Il est vrai que la détermination du terme à ajouter aux conditions aux limites (en contraintes) au voisinage du contour délimitant la surface ouverte S pose des problèmes. Ce terme subit, en général, un saut lors du passage de la surface S_1 à la surface S_2. Afin d'éliminer la première difficulté il est utile de considérer un potentiel de couche double distribué sur une surface qui s'obtient en complétant S par une bande étroite. On donne sur celle-ci la densité définie par le prolongement continu de la fonction du saut des serrages et s'annulant sur l'autre bord. La présence d'un saut des contraintes dans les conditions aux limites conduit à la nécessité d'introduire comme usuellement, au voisinage du contour frontière, une discrétisation plus fine de la surface.

Pour déterminer les contraintes engendrées par le potentiel de couche double au voisinage de la surface sur laquelle est donnée la densité, on peut procéder par extrapolation. Le procédé est étudié en détail au § 6 [115].

Envisageons des exemples. Dans [120] on considère le problème à symétrie axiale que pose l'ajustement à chaud d'un cylindre creux avec un cylindre plein. C'est un problème pratique où il s'agit de calculer les contraintes d'assemblage dans un cylindre de laminoir fretté (fig. 83). Par profilage du cylindre on arrive à obtenir des contraintes de contact assurant un bon fonctionnement de la pièce composée (sans glissement de la frette) pour des contraintes relativement basses dans la frette.

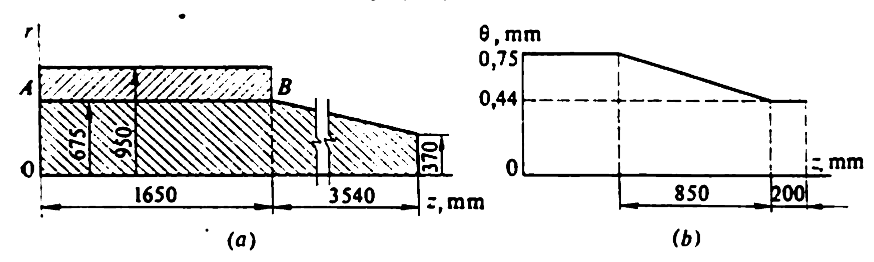


Fig. 83. Cylindre fretté.

Il était d'usage de résoudre les problèmes de ce genre comme des problèmes plans. Avec ce modèle simplifié on obtenait les valeurs nulles de la composante tangentielle sur la surface de contact.

Déterminons la valeur du saut des déplacements. Pour la composante normale cette question est claire : le saut est la différence des rayons. Pour déterminer le saut de la composante tangentielle des déplacements dirigée suivant la génératrice il est nécessaire d'analyser la technologie d'assemblage. Admettons qu'au cours du refroidissement de la frette celle-ci serre le cylindre suivant toute la surface. Dans l'hypothèse de l'adhérence complète on peut admettre que le saut des déplacements est une fonction linéaire de la coordonnée axiale, définie par la différence des températures au moment du contact. Le problème ayant un plan de symétrie, le saut des déplacements dans le plan de symétrie s'annule. On comprend que la détermination du saut de la composante tangentielle des déplacements dans le cas général (prise non simultanée des pièces en contact ou glissement avec frottement) est un problème très complexe.

Sur la figure 84 sont montrés les résultats des calculs des composantes normale et tangentielle des contraintes de contact et sur la figure 85 les composantes du tenseur des contraintes dans la frette et dans le cylindre dans différentes sections de l'arbre composé. On supposait dans les calculs (pour tenir compte du glissement) que le saut de la composante tangentielle était égal à la moitié de la valeur obtenue dans l'hypothèse d'adhérence complète.

Signalons un cas particulier d'importance pratique. Supposons que la surface S est une partie de la surface cylindrique et le serrage (le saut des déplacements) est de valeur constante et dirigé suivant le rayon. Les termes complémentaires peuvent alors être déterminés à partir de la solution du problème de Lamé dans des conditions de déformation plane. Pour le domaine intérieur le terme complémentaire est de la forme

$$\sigma_r = \sigma_\theta = -\frac{2\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}\frac{\delta}{R}; \quad \sigma_z = -\frac{2\mu\lambda}{\lambda+2\mu}\frac{\delta}{R} \tag{7.6}$$

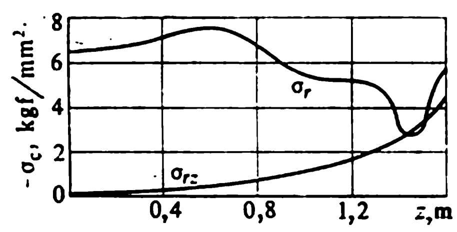


Fig. 84. Contraintes de contact.

et pour le domaine extérieur il est

$$\sigma_r = -\sigma_\theta = -\frac{2\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}\frac{\delta R}{r^2}, \quad \sigma_z = 0, \tag{7.7}$$

δ est le serrage, R le rayon de la surface cylindrique.

Passons à l'examen de corps composés de pièces aux différentes constantes d'élasticité, i.e. de corps homogènes par morceaux. Soient un ensemble de surfaces $S_1, S_2, \ldots, S_m$ disjointes et une sur-

face S_0 telle que toutes les autres surfaces sont disposées en dehors ou à l'intérieur de celle-ci (la surface S_0 peut ne pas exister). Le domaine D_0 compris entre les surfaces S_0, $S_1, \ldots, S_m$ est supposé rempli d'un milieu avec les constantes λ_0 et μ_0, les domaines D_j^m de milieux avec les constantes λ_j et μ_j ($j = 1, 2, \ldots, m$). Ainsi, les surfaces S_j ($j \neq 0$) s'avèrent être des surfaces de conjugaison (de contact) des milieux. On donne sur la surface S_0 une condition aux limites de type quelconque. En l'absence de la surface S_0 (quand le domaine D_0 s'étend dans l'infini) il est nécessaire de donner le comportement de la solution à l'infini.

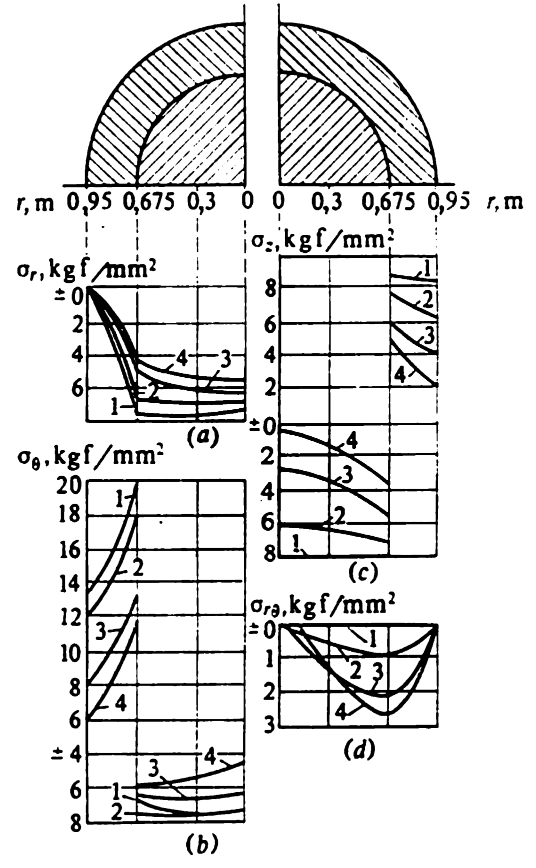


Fig. 85. Contraintes dans la frette et l'arbre du cylindre dans plusieurs sections.

Une position plus générale des problèmes concernant un milieu homogène par morceaux englobe les cas où les domaines D_j^+ sont eux-mêmes remplis de milieu non homogène et aussi ceux où les surfaces de séparation des milieux émergent à la surface extérieure. Un cas particulier de ce problème est le problème décrit au § 5 relatif à la compression de deux demi-espaces.

Le plus naturel est de ramener les problèmes concernant des corps homogènes par morceaux à un ensemble de problèmes pour chacun des domaines (remplis d'un milieu homogène), en introduisant sur chacune des surfaces de contact des fonctions auxiliaires. Se donnant les contraintes extérieures par exemple, résolvant sous forme générale l'ensemble de problèmes aux limites ainsi obtenu, déterminant les déplacements sur les surfaces de contact et égalant ceux-ci entre eux, on arrive à des équations par rapport aux contraintes introduites.

Il est commode de réaliser cette approche par la méthode du potentiel à partir des équations intégrales tirées des formules (1.12) et (1.14). Nous obtenons alors un système d'équations intégrales à noyaux réguliers et singuliers. Comme inconnus figureront les déplacements et les contraintes sur les surfaces de contact, ainsi que les fonctions données sur la surface S_0.

Nous allons résoudre notre problème à partir de la condition la plus simple, notamment supposant qu'il y a adhérence entre les surfaces en contact. Ecrivons ces conditions sous une forme plus générale :

$$\boldsymbol{u}_j(q) - \boldsymbol{u}_0(q) = \boldsymbol{F}_{1j}(q), \tag{7.8}$$

$$\overset{\lambda_j\mu_j}{\boldsymbol{T}_\nu}\boldsymbol{u}_j(q) - \overset{\lambda_0\mu_0}{\boldsymbol{T}_\nu}\boldsymbol{u}_0(q) = \boldsymbol{F}_{2j}(q) \quad (q \in S_j,\ j \neq 0). \tag{7.9}$$

Le sens des notations utilisées dans (7.9) pour l'opérateur $\boldsymbol{T}$ est évident. Les fonctions $\boldsymbol{F}_{1j}$ et $\boldsymbol{F}_{2j}$ doivent être données. Le sens physique des fonctions $\boldsymbol{F}_{ij}$ est clair : elles définissent la grandeur du « serrage » avec lequel l'un des corps (inclusion) est introduit dans l'autre.

Signalons que pour le cas où toutes les surfaces de séparation des milieux sont fermées, sont obtenues les équations intégrales singulières (à noyaux de structure très volumineuse) [10]. Il est démontré que ces équations sont toujours résolubles (dans le cas où le domaine D_0 est fini, on exige la vérification de la condition d'équilibre du corps en entier).

Examinons plus en détail le cas particulier de coefficients de Poisson identiques dans tous les milieux (i.e. le cas où $\lambda_j/\lambda_0 = \mu_j/\mu_0 = k_j$). Il est alors aisé d'obtenir des équations intégrales singulières pratiquement de même structure que les équations concernant un milieu homogène. Récrivons la condition (7.9) sous la forme

$$k_j\overset{\lambda_0\mu_0}{\boldsymbol{T}_\nu}\boldsymbol{u}_j(q) - \overset{\lambda_0\mu_0}{\boldsymbol{T}_\nu}\boldsymbol{u}_0(q) = \boldsymbol{F}_{2j}(q). \tag{7.10}$$

Nous supposerons ensuite pour plus de simplicité que $\boldsymbol{F}_{1j}(q) = 0$ et en outre, pour plus de précision, que sur la surface S_0 sont données les contraintes $\boldsymbol{F}_0(q')$. Introduisons dans le domaine $D(D_0 \cup D_1^+ \cup \ldots \cup D_m^+)$ un potentiel de couche simple $\boldsymbol{V}(p, \varphi)$ dont la densité est distribuée suivant les surfaces S_j. On note symboliquement $\boldsymbol{\varphi}$ l'ensemble des fonctions $\boldsymbol{\varphi}_j$ définies sur les surfaces S_j. Ce potentiel est construit à partir des constantes λ_0 et μ_0.

Nous obtenons alors pour la densité φ des équations intégrales singulières (plus exactement, un système d'équations), à savoir

$$\varphi_0(q') + \sum_{j=0}^{m} \int_{S_j} \Gamma_1(q', q)\, \varphi_j(q)\, dS_q = F_0(q') \quad (q' \in S_0),$$
$$\varphi_i(q') + \alpha_i \sum_{j=0}^{m} \int_{S_j} \Gamma_1(q', q)\, \varphi_j(q)\, dS_q = \frac{1}{1+k_i} F_{2i}(q') \tag{7.11}$$
$$\left(q' \in S_i;\ \alpha_i = \frac{1-k_i}{1+k_i}\right).$$

Ces équations diffèrent des équations (2.3) (pour le cas d'un domaine délimité par plusieurs surfaces) par le fait que certains facteurs α_i sont inférieurs en valeur absolue à l'unité. La donnée des déplacements sur S_0 entraîne des modifications évidentes. Les noyaux étant de structure identique à celle de noyaux correspondant au milieu homogène, les alternatives de Fredholm s'y étendent automatiquement à partir des résultats du § 2.

Dans le cas où la surface S_0 n'existe pas et toutes les inclusions sont du même matériau ($\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = \text{const}$), la méthode des approximations successives sera convergente en vertu des propriétés spectrales. établies au § 2, des équations (2.3) (dans les équations (7.9) il convient de poser $\lambda = \alpha$).

Terminons ce paragraphe par l'examen d'un procédé de résolution des problèmes de la théorie de l'élasticité pour des corps homogènes par morceaux [119]. Sur la surface de contact les contraintes de contact inconnues sont développées en séries suivant un système complet de fonctions avec si possible des facteurs de poids tenant compte de l'état de contrainte aux points du contour délimitant la surface de contact (si cette surface n'est pas fermée). On résout ensuite pour les corps homogènes un ensemble de seconds problèmes aux limites pour des conditions aux limites identiques pour chaque harmonique. Les coefficients des développements sont tirés de la condition de minimalité de l'écart des déplacements, ce qui conduit à un système d'équations algébrique. La construction d'une solution stable peut nécessiter l'emploi d'algorithmes de régularisation. Il s'avère que l'utilisation d'un système de fonctions fortement minimal ne conduit pas automatiquement en général à un système d'équations algébrique bien conditionné, car le système de fonctions obtenu pour les déplacements (sur la surface de contact) n'est pas fortement minimal. Dans le travail cité on a utilisé pour obtenir une solution stable du système le développement singulier de la matrice [162, 31]. La précision avec laquelle on calcule l'élément du système algé-

brique est déterminée par le nombre de fonctions retenues dans le développement.

On donne à titre d'exemple la résolution du problème pour un cylindre composé (fig. 86). Toutes les constantes et les dimensions

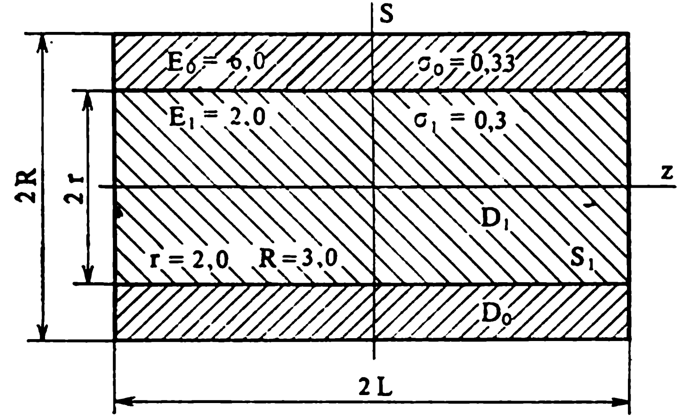


Fig. 86. Section d'un cylindre composé.

sont indiquées sur la figure. Le serrage était constant. On donne la solution pour deux variantes : en l'absence de contraintes tangentielles et en cas d'adhérence complète. Le développement

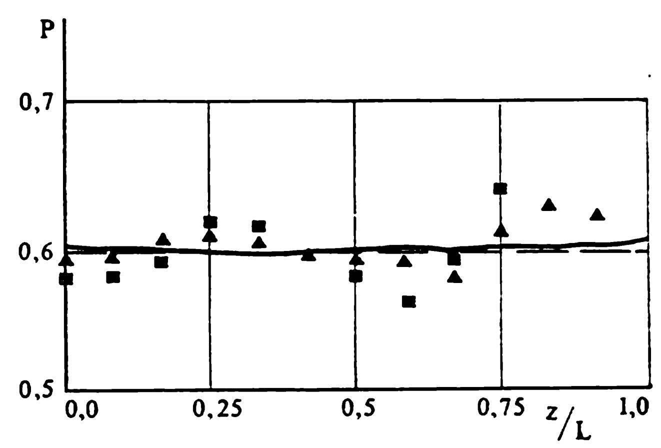


Fig. 87. Composante normale des contraintes de contact pour un contact sans frottement.

était effectué suivant les polynômes de Tchébychev (pairs pour les contraintes normales et impairs dans le second problème) pour les contraintes tangentielles en fonction de l'argument z/L. Sur les figures 87 et 88, *a* et *b* sont reportés les résultats des calculs

(pour les contraintes de contact). La courbe continue traduit la solution obtenue au moyen du développement singulier de la matrice (quand les inconnues correspondant à de petits éléments

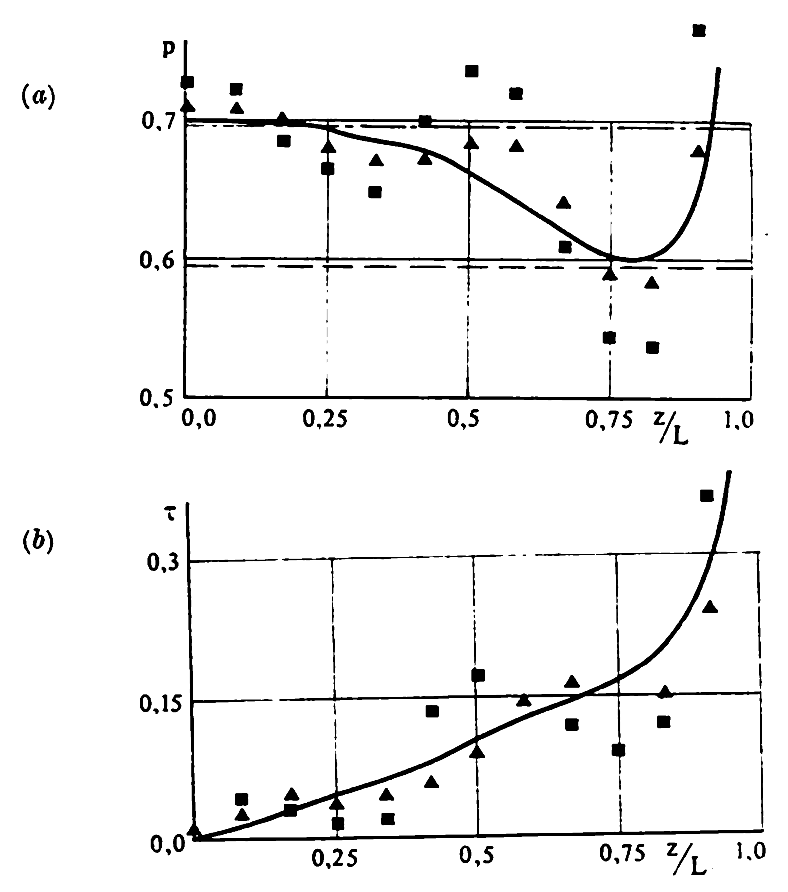


Fig. 88. Composantes normale (*a*) et tangentielle (*b*) des contraintes de contact en présence du frottement.

diagonaux étaient supposées nulles). La précision sur les solutions des seconds problèmes (obtenues par la méthode des potentiels) était de $5 \cdot 10^{-3}$. Les problèmes aux limites étaient résolus avec une précision de 10^{-4} et 10^{-6}, le problème pour le corps composé (i.e. le système algébrique) se résolvait directement. Ces solutions sont représentées respectivement par des triangles et des carrés. Pour comparer, on donne sur la figure la solution de Lamé (ligne en pointillés pour un état de contrainte plan et ligne en trait mixte pour un état de déformation plan).

CHAPITRE VIII

MÉTHODES VARIATIONNELLES ET DES DIFFÉRENCES FINIES DANS LES PROBLÈMES DE L'ÉLASTICITÉ

§ 1. Méthodes variationnelles en théorie de l'élasticité

Continuons l'étude des problèmes spatiaux de l'élasticité, mais sur une base variationnelle. Nous partirons des équations d'équilibre (4.4″) du chapitre II :

$$(\lambda + 2\mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{u} - \mu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{u} = \boldsymbol{P} \tag{1.1}$$

que nous écrirons sous une forme symbolique

$$A\boldsymbol{u} = \boldsymbol{P}. \tag{1.1'}$$

Nous allons considérer un problème mixte pour un domaine fini D délimité par une surface S constituée de deux parties S_1 et S_2; on a par ailleurs les conditions

$$\boldsymbol{u}|_{S_1} = 0, \quad \boldsymbol{T}_\nu \boldsymbol{u}|_{S_2} = 0. \tag{1.2}$$

Ainsi nous avons une équation opératorielle (différentielle) aux conditions aux limites homogènes. Montrons que ce problème, y compris les cas limites où l'une des surfaces, S_1 ou S_2, fait défaut, se ramène au problème de minimisation d'une fonctionnelle avec les conditions aux limites correspondantes

$$F(\boldsymbol{u}) = \int_D [W(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{u}\boldsymbol{P}]\, d\Omega, \tag{1.3}$$

où $W(\boldsymbol{u})$ est l'énergie potentielle des déformations (cf. § 3, ch. II).

Introduisons en considération l'espace hilbertien $L_2(D)$ des fonctions vectorielles $\boldsymbol{u}(p)$ telles que $\int_D |\boldsymbol{u}(p)|^2 d\Omega < \infty$. Le produit scalaire sera déterminé comme usuellement par la formule

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \int_D (u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3)\, d\Omega.$$

Nous considérerons dans cet espace des fonctions continues et continûment différentiables dans D, qui vérifient l'une des conditions (1.2) ainsi que l'inégalité $\int_D |Au|^2 \, d\Omega < \infty$. Formons le produit scalaire

$$(Au, u) = \int_D uAu \, d\Omega. \tag{1.4}$$

En vertu de la troisième formule de Betti (4.26'), ch. II (compte tenu de ce que les déplacements vérifient une équation avec second membre), nous obtenons l'égalité

$$\int_D uAu \, d\Omega = 2\int_D W(u) \, d\Omega - \int_S uT_\nu u \, dS.$$

La dernière intégrale s'annule par suite de l'homogénéité des conditions aux limites (1.2). Nous obtenons l'égalité

$$\int_D uAu \, d\Omega = 2\int_D W(u) \, d\Omega, \tag{1.5}$$

d'où il découle que l'opérateur considéré est symétrique.

$W(u)$ étant une forme quadratique définie positive, il découle de l'égalité $\int_D uAu \, d\Omega = 0$ que toutes les déformations dans le corps s'annulent et donc que les déplacements se déterminent à un mouvement de solide près. D'autre part, de la condition imposée à la surface S_1 (si elle ne dégénère pas) suit que les déplacements sont identiquement nuls. Nous avons démontré la positivité de l'opérateur A pour les problèmes I et mixte. Par conséquent, pour ces problèmes l'opérateur de la théorie de l'élasticité admet une interprétation variationnelle équivalente : sa solution minimise la fonctionnelle

$$F(u) = (Au, u) - 2(P, u) = 2\int_D [W(u) - Pu] \, d\Omega \tag{1.6}$$

sur l'ensemble des fonctions vérifiant la première condition (1.2).

La complication qui apparaît dans le deuxième problème est analogue à celle du problème de Neumann pour l'équation de

Laplace. Afin d'obtenir ici aussi un opérateur positif on soumet l'espace des fonctions admissibles à la restriction

$$\int_D \boldsymbol{u}\, d\Omega = 0, \quad \int_D (\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{u})\, d\Omega = 0. \tag{1.7}$$

En effet, il ressort de la condition $(\boldsymbol{u}, A\boldsymbol{u}) = 0$ que les déplacements se déterminent à un mouvement de solide près, mais en les soumettant aux restrictions (1.7) nous obtenons qu'ils s'annulent.

D'autre part, pour le deuxième problème intérieur il est indispensable que soient réalisées les conditions d'équilibre du corps en entier. Dans le cas donné, vu l'homogénéité des conditions aux limites et la non-homogénéité de l'équation elle-même, ces conditions prennent la forme *).

$$\int_D \boldsymbol{P}\, d\Omega = 0, \quad \int_D (\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{P})\, d\Omega = 0. \tag{1.8}$$

Aussi, effectuerons-nous toutes les constructions dans un espace hilbertien plus restreint, exigeant que chacun des éléments vérifie la seconde condition (1.2) ($S_2 = S$) et les conditions (1.7). De la condition $(\boldsymbol{u}, A\boldsymbol{u}) = 0$ il découlera alors que $\boldsymbol{u} \equiv 0$. Donc, l'opérateur de la théorie de l'élasticité est positif.

Dans le cas général du problème mixte (aux conditions aux limites non homogènes) nous avons la fonctionnelle

$$F(\boldsymbol{u}) = 2\left\{\int_D [W(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{u}\boldsymbol{P}]\, d\Omega - \int_{S_2} \boldsymbol{u}\boldsymbol{F}_2\, dS\right\}, \tag{1.9}$$

où $\boldsymbol{F}_2$ est le vecteur des contraintes donné sur S_2. Dans les cas particuliers nous avons

$$F(\boldsymbol{u}) = 2\int_D [W(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{u}\boldsymbol{P}]\, d\Omega \text{ pour } S = S_1, \tag{1.9'}$$

$$F(\boldsymbol{u}) = 2\left\{\int_D [W(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{u}\boldsymbol{P}]\, d\Omega - \int_S \boldsymbol{u}\boldsymbol{F}_2\, dS\right\} \text{ pour } S = S_2. \tag{1.9''}$$

*) Dans le cas contraire, i.e. lorsque l'équation est homogène et les conditions aux limites ne le sont pas, les restrictions sont (1.7), ch. III.

Les conditions aux limites ne peuvent être satisfaites que sur la partie de la surface où sont donnés les déplacements, puisque les conditions aux limites en contraintes sont naturelles.

Remarquons que le résultat sur le minimum de la fonctionnelle, établi plus haut, n'est autre que le principe connu en élasticité du minimum de l'énergie potentielle consistant en ce que de tous les déplacements vérifiant les conditions aux limites en déplacements ne sont réalisés que ceux pour lesquels l'énergie potentielle est minimale.

Conformément au schéma général d'étude des problèmes variationnels (§ 12, chapitre I) pour démontrer leur résolubilité il faut établir un résultat plus fort que la positivité de l'opérateur correspondant, à savoir démontrer que celui-ci est défini positif.

Examinons le premier problème fondamental [91].

Pour simplifier l'écriture, convenons d'employer des lettres grecques pour désigner une sommation suivant des indices répétés, la sommation est également à effectuer lorsqu'il n'y a pas d'indice répété, mais le terme correspondant est élevé au carré.

Introduisons les notations

$$s_{km} = \frac{1}{2}(u_{k,m} + u_{m,k}), \quad r_{km} = \frac{1}{2}(u_{k,m} - u_{m,k}),$$

$$H(u) = \int\limits_D u_\alpha^2 \, d\Omega, \quad D(u) = \int\limits_D u_{\alpha,\beta}^2 \, d\Omega, \tag{1.10}$$

$$S(u) = \int\limits_D S_{\alpha\beta}^2 \, d\Omega, \quad R(u) = \int\limits_D r_{\alpha\beta}^2 \, d\Omega.$$

On démontre sans peine l'égalité

$$D(u) = R(u) + S(u). \tag{1.11}$$

Pour établir que l'opérateur de la théorie de l'élasticité est défini positif il faut prouver l'inégalité

$$R(u) \leqslant cS(u) \quad (c = \text{const}), \tag{1.12}$$

dite *inégalité de Korn*. Comme nous nous occupons du premier problème, l'inégalité sera établie sous l'hypothèse $u|_S = 0$. Remarquons qu'alors

$$D(u) \leqslant (1 + c)S(u). \tag{1.13}$$

Nous supposerons que le déplacement u et ses dérivées premières et secondes sont continus jusqu'à la surface frontière, qui peut

être régulière par morceaux. On a évidemment les égalités

$$u_{k.m} = s_{km} + r_{km}, \quad u_{m.k} = s_{km} - r_{km}.$$

Faisons le produit et sommons sur les deux indices. Nous avons

$$u_{\alpha.\beta} u_{\beta.\alpha} = s_{\alpha\beta}^2 - r_{\alpha\beta}^2.$$

Comme $u_{\alpha.\alpha} u_{\beta.\beta} = s_{\alpha\alpha}^2$, alors

$$s_{\alpha\beta}^2 - r_{\alpha\beta}^2 - s_{\alpha\alpha}^2 = u_{\alpha.\beta} u_{\beta.\alpha} - u_{\alpha.\alpha} u_{\beta.\beta} = (u_\alpha u_{\beta.\alpha})_{.\beta} - (u_\alpha u_{\beta.\beta})_{.\alpha}. \quad (1.14)$$

Prenons maintenant l'intégrale de volume des deux membres de l'égalité (1.14). Transformons l'intégrale du premier membre en une intégrale de surface. Etant donné l'homogénéité des conditions aux limites, nous nous assurons qu'elle est nulle. Donc est nulle également l'intégrale du premier membre :

$$\int_D (s_{\alpha\beta}^2 - r_{\alpha\beta}^2 - s_{\alpha\alpha}^2)\, d\Omega = 0. \quad (1.15)$$

Dans ce cas

$$\int_D r_{\alpha\beta}^2 d\Omega = \int_D (s_{\alpha\beta}^2 - s_{\alpha\alpha}^2) d\Omega \leqslant \int_D s_{\alpha\beta}^2\, d\Omega. \quad (1.16)$$

Utilisant les notations figurant dans (1.10) nous nous convainçons que cette inégalité est l'inégalité de Korn et $c = 1$.

Remarquant que $W(u)$ est une forme quadratique définie positive des déformations, elle le sera pour la quantité s_{km} aussi. Notons m_0 la valeur minimale de cette forme quadratique, alors $W(u) \geqslant m_0 s_{\alpha\beta}^2$.

Par conséquent

$$\int_D W(u)\, d\Omega \geqslant m_0 \int_D s_{\alpha\beta}^2\, d\Omega = m_0 S(u). \quad (1.17)$$

Faisant appel à l'inégalité (1.13) nous obtenons

$$\int_D W(u)\, d\Omega \geqslant \frac{m_0}{2} D(u). \quad (1.18)$$

Puis à l'aide de l'inégalité de Friedrichs (11.43), ch. I, qu'on applique à chacune des composantes du vecteur déplacement (ceci est légitime, puisque sur la surface les déplacements s'annu-

lent), nous avons :

$$\int_D u_k^2\,d\Omega \leqslant \frac{1}{\varkappa}\int_D u_{k,\beta}^2\,d\Omega. \tag{1.19}$$

Sommant ces inégalités pour chaque composante nous obtenons

$$H(u) = \int_D u_\alpha^2\,d\Omega \leqslant \frac{1}{\varkappa}\,D(u). \tag{1.20}$$

Sommant toutes les inégalités précédentes nous obtenons le résultat énoncé

$$(Au,\,u) \geqslant \gamma^2\,H(u) = \gamma^2\|u\|^2 \quad \left(\gamma^2 = \frac{m_0\varkappa}{2}\right). \tag{1.21}$$

Abordons le deuxième problème fondamental. L'inégalité de Korn ne sera pas déduite en raison de sa démonstration volumineuse [34]; remarquons seulement qu'elle doit être établie sous les conditions

$$\int_D r_{km}\,d\Omega = 0. \tag{1.22}$$

Appliquons à chaque composante des déplacements l'inégalité de Poincaré (11.45), ch. I, tout en tenant compte de ce que la deuxième intégrale de droite s'annule en vertu des conditions (1.7) :

$$\int_D u_k^2\,d\Omega \leqslant A\int_D u_{k,\alpha}^2\,d\Omega. \tag{1.23}$$

Faisant la somme de (1.23), nous obtenons l'inégalité

$$\|u\|^2 \leqslant AD(u). \tag{1.24}$$

Plaçons l'origine des coordonnées au centre de gravité du volume D. Introduisons les vecteurs $b^{(km)}$ de composantes

$$b_k^{(km)} = x_m,\quad b_m^{(km)} = -\,x_k,\quad b_i^{(km)} = 0 \quad (i \neq k;\ i \neq m). \tag{1.25}$$

Ces vecteurs correspondent à la rotation du corps en tant que solide.

Appliquons l'inégalité (1.24) au déplacement $u^* = u + c_{km}b^{(km)}$ où c_{km} sont des constantes arbitraires. Exigeons en outre que le déplacement u^* vérifie l'inégalité (1.22). Remarquons qu'avec le passage à u^* les conditions (1.7) restent en vigueur.

D'après l'inégalité de Korn nous obtenons

$$R(u^*) \leqslant CS(u^*)$$

et par conséquent

$$\frac{\|u^*\|^2}{A} \leqslant D(u^*) \leqslant \frac{1+C}{m_0}\int_D W(u^*)\,d\Omega = \frac{1+C}{m_0}\int_D W(u)\,d\Omega = (Au, u^*). \tag{1.26}$$

Il reste à montrer que $\|u^*\|^2 \geqslant \|u\|^2$. Cette inégalité a lieu en vertu de la deuxième égalité (1.7).

Ainsi nous obtenons le résultat énoncé

$$(Au, u) \geqslant \gamma^2\|u\|^2 \quad \left(\gamma = \sqrt{\frac{m_0}{A(1+C)}}\right). \tag{1.27}$$

On montre dans [27] que l'opérateur de la théorie de l'élasticité est défini positif dans le cas du problème mixte aussi.

La théorie générale nous conduit à l'affirmation suivante: dans l'espace énergétique existe toujours une solution (en général, distributionnelle) des problèmes variationnels correspondant aux problèmes fondamentaux et mixtes de l'élasticité. Cette solution peut être obtenue par la méthode de Ritz.

Elucidons pour quelles conditions la solution distributionnelle est solution au sens classique (i.e. admet le nombre nécessaire de dérivées, vérifie l'équation différentielle et les conditions aux limites). Il s'avère [19, 93] que si le second membre est une fonction continue par morceaux, les équations de Lamé sont vérifiées. Quant aux conditions aux limites, elles sont satisfaites si la surface frontière est suffisamment régulière et si les seconds membres des équations d'équilibre sont continûment différentiables autant de fois qu'il le faut. Dans le cas général les conditions aux limites homogènes sont vérifiées au sens suivant: il existe une suite de fonctions u_n (dans l'espace énergétique) telle que soit vérifiée l'égalité

$$\lim_{n\to\infty}\int_D \sum_{i,k=1}^{3}\left(\frac{\partial u_{ni}}{\partial x_k} - \frac{\partial u_{0i}}{\partial x_k}\right)d\Omega = 0, \tag{1.28}$$

où u_0 est une fonction minimisant la fonctionnelle (i.e. la solution distributionnelle).

Considérons maintenant la méthode des projections orthogonales (cf. § 12, ch. I). Définissons dans l'espace hilbertien K

des tenseurs T le produit scalaire

$$(T', T'') = \int_D (\sigma_x' \varepsilon_x'' + \sigma_y' \varepsilon_y'' + \sigma_z' \varepsilon_z'' + \tau_{xy}' \gamma_{xy}'' + \tau_{xz}' \gamma_{xz}'' + \tau_{yz}' \gamma_{yz}'')\, d\Omega. \quad (1.29)$$

Le carré de la norme est dans ce cas donné par l'intégrale

$$\|T\|^2 = \int_D (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz})\, d\Omega \quad (1.30)$$

et est égal au double de l'énergie potentielle.

Nous allons étudier l'application de la méthode sur l'exemple d'un problème mixte. Considérons l'ensemble des tenseurs vérifiant les équations d'équilibre homogènes et la première condition (1.2). Notons cet ensemble K_1 *). Formons maintenant l'ensemble K_2 des tenseurs vérifiant les équations de compatibilité des déformations en contraintes (équations de Beltrami-Mitchell) (§ 4, ch. II), les déplacements correspondants devant par ailleurs vérifier la première condition (1.2).

Donc on a construit dans l'espace K deux sous-espaces. Montrons que l'espace K est la somme directe des espaces K_1 et K_2 :

$$K = K_1 \oplus K_2. \quad (1.31)$$

Il importe maintenant d'établir que deux tenseurs quelconques $T_1 \in K_1$ et $T_2 \in K_2$ sont orthogonaux entre eux et que tout tenseur T peut être représenté sous la forme $T_1 + T_2$.

Exprimons dans la relation (1.29) (écrite par rapport aux tenseurs T_1 et T_2) les déformations ε_{ij}^1 par les déplacements et intégrons celle-ci par parties. Nous obtenons

$$(T_1, T_2) = \int_D \left[u_x^1 \left(\frac{\partial \sigma_x^2}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}^2}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}^2}{\partial z} \right) + u_y^1 \left(\frac{\partial \tau_{xy}^2}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y^2}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}^2}{\partial z} \right) + u_z^1 \left(\frac{\partial \tau_{xz}^2}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}^2}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z^2}{\partial z} \right) \right] + \int_S u^1 T_\nu^2 u \, dS. \quad (1.32)$$

Le tenseur T_2 vérifiant des conditions d'équilibre homogènes, l'intégrale de volume figurant dans (1.32) s'annule. S'annule également l'intégrale de surface en raison des conditions aux limites. Ainsi l'orthogonalité des sous-espaces K_1 et K_2 est établie.

*) Dans le cas du deuxième problème fondamental ($S = S_2$) l'ensemble K_1 n'est soumis à aucune condition aux limites.

Démontrons maintenant que tout tenseur $\boldsymbol{T}$ peut être représenté sous forme de la somme $\boldsymbol{T}_1 + \boldsymbol{T}_2$ (les composantes du tenseur $\boldsymbol{T}$ étant supposées des fonctions continues et continûment différentiables dans D). Soit $\boldsymbol{T}_1$ le tenseur des contraintes vérifiant les conditions homogènes (1.2) et les équations d'équilibre. Dans ce cas $\boldsymbol{T}_2 = \boldsymbol{T} - \boldsymbol{T}_1$.

Soit $\boldsymbol{T}_0$ la solution du problème de l'élasticité. Notons $\tilde{\boldsymbol{T}}$ le tenseur vérifiant les équations d'équilibre et la deuxième condition (1.2). Il est évident que le tenseur $\boldsymbol{T}_0$ est la projection du tenseur $\tilde{\boldsymbol{T}}$ sur le sous-espace K_1. Comme $(\tilde{\boldsymbol{T}} - \boldsymbol{T}_0) \in K_2$, alors $(\boldsymbol{T}_0, \tilde{\boldsymbol{T}} - \boldsymbol{T}_0) = 0$. Dans ce cas

$$\|\tilde{\boldsymbol{T}}\|^2 = \|\boldsymbol{T}_0\|^2 + \|\tilde{\boldsymbol{T}} - \boldsymbol{T}_0\|^2 \geqslant \|\boldsymbol{T}_0\|^2. \tag{1.33}$$

L'inégalité (1.33) peut être interprétée de la façon suivante (*principe de Castigliano*) : de tous les tenseurs des contraintes vérifiant les équations d'équilibre et la condition aux limites en contraintes, les contraintes effectives communiquent au corps la plus petite énergie potentielle.

Examinons un procédé de construction des fonctions de coordonnées qui a permis de résoudre effectivement le problème concernant la détermination des contraintes thermiques dans le problème doublement périodique d'un plan à ouvertures circulaires [145]. L'état de contrainte est créé grâce à un dégagement de chaleur uniforme d'intensité q. Dans ce cas pour la fonction des contraintes u le problème se ramène à la détermination du minimum de la fonctionnelle

$$\iint [(\Delta u)^2 - 2qu]\, dS$$

lorsque $u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0$ sur les contours des cercles.

En raison de la double périodicité l'intégration peut être effectuée suivant le domaine élémentaire $ABOC$ (fig. 89) si l'on exige en outre que soient vérifiées les conditions $\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial^3 u}{\partial n^3} = 0$ sur les segments AB, BO et CO.

Comme point de départ on prend la fonction

$$\varphi_0 = \left[\left(\cos\frac{\pi}{r}x + \cos\frac{\pi}{r}y\right)^2 + b\left(\cos\frac{\pi}{r}x - \cos\frac{\pi}{r}y\right)^2 - \right.$$
$$\left. - c\left(\cos\frac{\pi}{r}x + \cos\frac{\pi}{r}y\right) + d\right],$$

dont les coefficients sont choisis de la condition que cette fonction s'annule en 3 points de l'arc AC. Dans ce cas les fonctions du type

$$\varphi_0^2 \begin{cases} \left(\cos \frac{\pi}{r} x \quad \cos \frac{\pi}{r} y\right)^n \\ \left(\sin \frac{\pi}{r} x \quad \sin \frac{\pi}{r} y\right)^n, \quad n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

vérifient automatiquement les conditions de périodicité et les conditions sur le cercle. Six fonctions de coordonnées ont suffi pour construire la solution.

Appliquons maintenant les inégalités variationnelles à l'étude des problèmes avec restrictions. Comme on a noté au § 1 du chapitre III, ces problèmes se posent là où il s'agit d'un contact d'un corps rigide et de corps élastiques ou d'un contact de corps élastiques. Remarquons qu'il s'agit en fait d'une surface rigide, l'étendue du corps rigide lui-même n'ayant aucune importance. Les contraintes tangentielles seront supposées absentes sur toute la surface du corps élastique. L'équation de la surface rigide sera donnée sous la forme

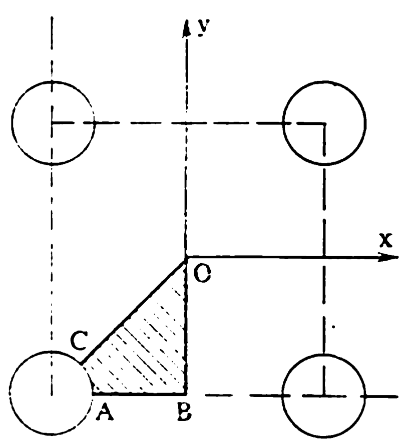


Fig. 89. Plan à orifices circulaires.

$$\psi(q) = 0, \tag{1.34}$$

c'est là une expression commode de la condition de non-pénétration du corps élastique à travers la surface. Linéarisant cette condition, nous retrouvons l'inégalité (1.14) du chapitre III :

$$\psi(q) + \text{grad}\, \psi u(q) \geqslant 0.$$

Nous admettrons qu'en dehors de la surface de contact les contraintes normales sont également nulles et qu'à l'intérieur de celle-ci elles sont non positives. Reprenant alors les raisonnements utilisés pour la considération du problème analogue posé pour une fonction harmonique, nous arrivons à l'inégalité variationnelle [70]

$$\int_D \Delta^* u \Delta^*(v-u)\, d\Omega \geqslant \int_D P(v-u)\, d\Omega, \tag{1.35}$$

qui a lieu pour tout déplacement v vérifiant la condition

$$\psi(q) + \operatorname{grad} \psi(q)\, v(q) \geqslant 0 \quad (q \in S).$$

La fonction u vérifiant l'inégalité (1.35) est justement la solution du problème avec restrictions.

Utilisant l'inégalité de Korn (1.12) on peut montrer que le problème avec restrictions (sous les conditions indiquées) se ramène au problème de minimisation de la fonctionnelle (1.3) si la fonction u obéit à la condition indiquée plus haut.

Toutes les méthodes décrites au § 12 du chapitre I sont applicables à la résolution de ce problème. Ainsi, par exemple, avec la fonctionnelle de Lagrange (l'algorithme de Arrow-Hurwitz) [71]

$$\mathscr{L}(u, p) = F(u) - \int_{S_1} [\psi(q) + \operatorname{grad} \psi u(q)]\, p(q)\, dS_q, \tag{1.36}$$

l'étape principale de l'algorithme est réalisée à l'aide de la procédure récurrente suivante *)

$$p^{k+1} = P_k\{p^k - \rho_k[\psi(q) + \operatorname{grad} \psi(q) u^k(q)]\}, \tag{1.37}$$

où l'opérateur P_k agit de la sorte :

$$P_k f = \begin{cases} 0, & f > 0, \\ f, & f \leqslant 0. \end{cases} \tag{1.38}$$

Envisageons la réalisation pratique de la méthode de Ritz dans les problèmes de l'élasticité. Il est à mentionner que la construction des fonctions de coordonnées est suffisamment compliquée. Dans certains cas (une boule, un parallélépipède, etc.) cependant ce problème se résout de façon relativement simple [29].

Signalons une approche assez générale qui s'appuie sur la théorie des fonctions R [126].

Comme on a noté au § 12 du chapitre I, la résolution des problèmes aux limites par la méthode de Ritz peut conduire à un algorithme instable. Illustrons cette affirmation sur l'exemple d'un problème concernant la flexion d'une plaque en forme de secteur circulaire pour des conditions aux limites mixtes [94].

Soient a et b les rayons extérieur et intérieur, $2\varphi_0$ l'angle d'ouverture du secteur. On demande de déterminer le déplacement $w(x, y)$ vérifiant l'équation (4.25) du chapitre III pour les conditions aux limites

$$w(x, y)\big|_{L_1} = 0, \quad \left.\frac{\partial w(x, y)}{\partial n}\right|_{L_1} = 0$$

---

*) On peut montrer que la quantité $p(q)$ est proportionnelle à la pression normale distribuée sur la surface de contact.

sur la partie L_1 du contour et

$$M_n|_{L_2} = 0, \quad \left[Q_n + \frac{\partial M_{n\tau}}{\partial s}\right]\Big|_{L_2} = 0$$

sur la partie L_2.

Conformément au schéma général, on montre qu'en position variationnelle (pour $q = \text{const}$) le problème se ramène à la recherche du minimum de la fonctionnelle

$$\iint\Bigg[\left(\frac{\partial^2\tilde{w}}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2\tilde{w}}{\partial y^2}\right)^2 + 2(1-\nu)\left(\frac{\partial^2\tilde{w}}{\partial x\,\partial y}\right)^2 + \\ + 2\nu\left(\frac{\partial^2\tilde{w}}{\partial x\,\partial y}\right)^2 + 2\nu\frac{\partial^2\tilde{w}}{\partial x^2}\frac{\partial^2\tilde{w}}{\partial y^2} - \frac{2}{a^2}\tilde{w}\Bigg]dx\,dy, \quad (1.39)$$

où $\tilde{w} = Dw/qa^2$, et D est la rigidité de la plaque.

Nous allons opérer en coordonnées polaires r, φ ($b < r < a$, $|\varphi| \leqslant 1/2\,\varphi_0$) et avec les variables adimensionnelles

$$\rho = \frac{r-b}{a} \quad \left(0 \leqslant \rho < \rho_0 = \frac{a-b}{a}\right), \quad \tilde{\varphi} = \frac{\varphi - 1/2\,\varphi_0}{\varphi_0} \quad (|\tilde{\varphi}| \leqslant 1/2). \quad (1.40)$$

Nous supposerons que la plaque est encastrée ($\tilde{w} = \partial\tilde{w}/\partial n = 0$) suivant l'arc intérieur ($\rho = 0$) et appuyée sur les parties restantes du contour. Les conditions d'encastrement étant principales, les fonctions de coordonnées doivent les vérifier. Nous introduirons deux systèmes de fonctions de coordonnées : les premières seront choisies sous la forme des produits

$$w_{ij} = \rho^{i+2}\tilde{\varphi}^{2j} \quad (i,\ j = 0,\ 1,\ 2, \ldots), \quad (1.41)$$

les secondes seront obtenues des premières par orthogonalisation des fonctions ρ^i sur le segment $(0,\ \rho_0)$ et des fonctions $\tilde{\varphi}^{2j}$ sur le segment $(-1/2,\ 1/2)$. Les fonctions ainsi obtenues seront notées $\overline{\rho}_i$ et $\overline{\varphi}_j$. Les produits de ces fonctions formeront précisément le second système

$$\tilde{w}_{ij} = \overline{\rho}_i\overline{\varphi}_j \quad (i, j = 0,\ 1,\ 2, \ldots). \quad (1.42)$$

On peut montrer que les fonctions du premier système ne sont pas fortement minimales dans l'espace énergétique correspondant, alors que les fonctions du second système le sont.

Les calculs ont été effectués pour $\rho_0 = 1{,}82$ et $\varphi_0 = 48°$. On a utilisé 12 fonctions de coordonnées ($i = 0,\ 1, 2,\ 3$ et $j = 0, 1, 2$) pour chaque système. Le système d'équations se résolvait par

une méthode exacte, l'erreur apparaissait lors de la construction de la matrice. Notons δ_a et δ_w l'erreur sur les coefficients de la matrice de Ritz et le déplacement w avec l'emploi du premier système de coordonnées, et $\overline{\delta}_a$, $\overline{\delta}_w$ les mêmes quantités pour le second système.

Dans le tableau 16 sont résumées ces valeurs rapportées à l'erreur $\delta_0 = 10^{-7}$ (artificielle) sur les coefficients de la matrice de Ritz.

Tableau 16

i, j	0,0	1,0	0,1	1,1	0,2
δ_a/δ_0	875	3 930	54 400	12 680	13 000
$\overline{\delta}_a/\delta_0$	0,195	0,692	0,550	0,314	2,82
i, j	2,1	1,2	2,2	3,0	3,2
δ_a/δ_0	34 700	16 900	20 200	23 600	22 900
$\overline{\delta}_a/\delta_0$	0,67	0,47	0,595	39,7	0,957

Comme nous voyons, un système non minimal donne lieu à des erreurs énormément élevées sur les coefficients et par conséquent sur la solution. Notons que sur l'arc extérieur le rapport δ_w/δ_0 varie entre 36 et 82. Le rapport $\overline{\delta}_w/\delta_0$ par ailleurs varie entre 0,1 à 0,23.

§ 2. Construction de suites minimisantes. Méthode des éléments finis

Supposons comme auparavant qu'un corps élastique isotrope occupe un domaine D délimité par une surface $S = S_1 \cup S_2$; on donne sur S_1 le vecteur nul des déplacements $\boldsymbol{F}_1 = 0$ et sur S_2, le vecteur des contraintes $\boldsymbol{F}_2$. Dans le domaine D agit le vecteur des forces massiques $\boldsymbol{P}$. Il faut déterminer l'état de contrainte et de déformation à l'intérieur du domaine.

Rappelons l'expression du potentiel élastique (3.23), ch. II,

$$W = \frac{1}{2}(\varepsilon_x\sigma_x + \varepsilon_y\sigma_y + \varepsilon_z\sigma_z + \gamma_{xz}\tau_{xz} + \gamma_{yz}\tau_{yz} + \gamma_{xy}\tau_{xy}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^T\boldsymbol{\sigma}, \qquad (2.1)$$

où T désigne la transposition.

En position variationnelle notre problème se ramène à la minimisation de la fonctionnelle quadratique

$$F(u) = (Au, u) - 2(P, u) - 2\int_{S_2} uF_2\,dS =$$

$$= \int_D u^T A u\, d\Omega - 2\int_D P^T u\, d\Omega - 2\int_{S_2} u^T F_2\, dS. \quad (2.2)$$

Nous avons montré auparavant (cf. § 1) que cette fonctionnelle coïncide avec l'expression de l'énergie potentielle globale

$$U = \int_D W\, d\Omega - \int_D P^T u\, d\Omega - \int_{S_2} u^T F_2\, dS.$$

Utilisons pour la minimisation de la fonctionnelle U la méthode des éléments finis exposée au § 13 du chapitre I. Récrivons la fonctionnelle sous la forme :

$$U = \frac{1}{2}\int_D \varepsilon^T \sigma\, d\Omega - \int_D u^T P\, d\Omega - \int_{S_1} u^T F_2\, dS. \quad (2.3)$$

La première intégrale est une forme quadratique par rapport aux composantes des déformations ε, puisqu'en vertu de la loi de Hooke (3.30), ch. II, $\sigma = C\varepsilon$, où la matrice C a l'aspect suivant :

$$C = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Tout comme dans le cas unidimensionnel (cf. § 13, ch. I), l'équation vectorielle est du deuxième ordre : la première intégrale dans (2.3) est liée aux dérivées du vecteur déplacement et les deux dernières, au chargement du corps par des forces massiques et surfaciques. Dans le cas unidimensionnel la dernière intégrale ne figurait pas, car on avait sur S_2 des conditions aux limites nulles. Ici elle apparaît par suite de l'application de la formule de Gauss-Ostrogradski aux intégrales de volume.

Il est évident qu'en partitionnant le corps en éléments finis de dimension appropriée et donnant sur ces éléments finis des fonc-

tions vectorielles polynomiales par morceaux pour approcher le vecteur u on peut procéder comme dans le cas déjà considéré de l'équation différentielle (13.1), ch. I, et obtenir pour U une approximation de la forme

$$U(u^h) = \frac{1}{2} q^T K q - F^T q, \tag{2.5}$$

où K est la matrice de rigidité du système, q le vecteur des inconnues aux points nodaux (des déplacements), F le vecteur des forces massiques et surfaciques reportées aux nœuds. Pour construire la matrice globale et les vecteurs globaux il suffit de calculer les matrices et les vecteurs pour un seul élément fini et, en les plaçant aux endroits correspondants du massif global, de les sommer. La sommation est réalisée de façon formelle de même que sont établies par exemple les équations d'équilibre des systèmes de barres en mécanique de construction.

Il faut maintenant calculer les matrices et les vecteurs se rapportant à un élément. Supposons donnée sur l'élément une approximation polynomiale de la forme

$$u^e = V^e q^e, \tag{2.6}$$

e désigne l'appartenance à un élément ; q est le vecteur des déplacements inconnus aux points nodaux, y compris leurs dérivées. Le vecteur des déformations est égal à

$$\varepsilon^e = Au^e = AV^e q^e = B^e q^e \quad (B^e = AV^e), \tag{2.7}$$

où A est l'opérateur

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix}. \tag{2.8}$$

Représentons maintenant le vecteur des contraintes sous la forme

$$\sigma^e = C\varepsilon^e = CB^e q^e.$$

Nous écrirons l'intégrale $\int\limits_{D^e} \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{P}\, d\Omega$ utilisée pour l'approximation de la fonctionnelle U sur un élément de la façon suivante :

$$\int\limits_{D^e} \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{P}\, d\Omega = \boldsymbol{q}^{e^T} \int\limits_{D^e} \boldsymbol{V}^{e^T} \boldsymbol{P}\, d\Omega = \boldsymbol{q}^{e^T} \boldsymbol{p}^e. \tag{2.9}$$

On note ici $\boldsymbol{p}^e$ le vecteur des forces massiques reportées aux nœuds (ce même procédé a été utilisé dans le problème unidimensionnel). Si un élément possède une face commune avec la frontière S_2 sur laquelle est donné le vecteur des forces surfaciques $\boldsymbol{F}_2$, on aura alors à calculer l'intégrale

$$\int\limits_{S_2^e} \boldsymbol{V}^{e^T} \boldsymbol{F}_2\, dS = \boldsymbol{q}^{e^T} \int\limits_{S_2^e} \boldsymbol{V}^{e^T} \boldsymbol{F}_2\, dS = \boldsymbol{q}^{e^T} \boldsymbol{r}^e, \tag{2.10}$$

où $\boldsymbol{r}^e$ est le vecteur des forces surfaciques reportées aux nœuds. Une matrice de rigidité élémentaire $\boldsymbol{K}^e$ apparaît par suite de l'approximation sur un élément de l'intégrale $\frac{1}{2}\int\limits_{D} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}\, d\Omega$:

$$\frac{1}{2}\int\limits_{D^e} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}\, d\Omega = \frac{1}{2}\int\limits_{D^e} (\boldsymbol{B}^e \boldsymbol{q}^e)^T \boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^e \boldsymbol{q}^e\, d\Omega =$$

$$= \frac{1}{2}\boldsymbol{q}^{e^T} \int\limits_{D^e} \boldsymbol{B}^{e^T} \boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^e\, d\Omega\, \boldsymbol{q}^e = \frac{1}{2}\boldsymbol{q}^{e^T} \boldsymbol{K}^e \boldsymbol{q}^e. \tag{2.11}$$

Ainsi, l'approximation de la fonctionnelle quadratique sur un élément fini est la suivante :

$$U^e = \frac{1}{2}\boldsymbol{q}^{e^T} \boldsymbol{K}^e \boldsymbol{q}^e - \boldsymbol{q}^{e^T} \boldsymbol{p}^e - \boldsymbol{q}^{e^T} \boldsymbol{r}^e, \tag{2.12}$$

et sommant sur tous les éléments nous obtenons

$$U^h = \frac{1}{2}\boldsymbol{q}^T \boldsymbol{K} \boldsymbol{q} - \boldsymbol{q}^T \boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}^T \boldsymbol{r} = \frac{1}{2}\boldsymbol{q}^T \boldsymbol{K} \boldsymbol{q} - \boldsymbol{q}^T \boldsymbol{F} \quad (\boldsymbol{F} = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{r}) \cdot \tag{2.13}$$

Minimisant U^h on obtient le système d'équations (par la méthode des éléments finis)

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{q} = \boldsymbol{F}. \tag{2.14}$$

On peut tenir compte des conditions aux limites sur la partie S_1 de la surface en négligeant les composantes données du vecteur $\boldsymbol{q}$, les lignes et colonnes correspondantes de la matrice $\boldsymbol{K}$ et les composantes correspondantes du vecteur $\boldsymbol{F}$.

Elucidons le sens mécanique des coefficients de la matrice de rigidité. Pour plus de commodité considérons un système possédant un seul degré de liberté en chaque nœud (à chaque composante du vecteur $\boldsymbol{q}$ correspond un degré de liberté). Supposons le système sollicité des charges nodales telles qu'elles engendrent un déplacement unitaire du seul j-ième nœud, alors que tous les autres restent immobiles, i.e.

$$q_j = 1, \quad q_k = 0 \quad (k \neq j).$$

Par suite le système (2.14) prend la forme

$$K_{ij} = F_i, \tag{2.15}$$

car seuls les coefficients K_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, N)$ sont multipliés par la composante non nulle du vecteur $\boldsymbol{q}$. Les coefficients K_{ij} ne sont donc autre chose que les réactions au i-ième nœud lors d'un déplacement unitaire du j-ième nœud, quand tous les autres nœuds sont immobiles. La matrice $\boldsymbol{K}$ est n-diagonale et si l'élément $K_{ij} \neq 0$, ceci signifie que les nœuds i et j sont liés par un élément quelconque. Les déplacements du nœud j n'engendrent donc de réaction au nœud i que lorsque les deux nœuds appartiennent à un même élément. L'interprétation est naturellement la même aussi avec plusieurs degrés de liberté aux nœuds.

Ecrivons séparément les étapes du calcul de la matrice de rigidité d'un élément. Introduisons avant tout l'approximation du vecteur déplacement :

$$\boldsymbol{u}^e = \boldsymbol{V}^e \boldsymbol{q}^e.$$

Puis calculons la matrice

$$\boldsymbol{B}^e = \boldsymbol{A}\boldsymbol{V}^e$$

et déterminons la matrice de rigidité d'un élément

$$\boldsymbol{K}^e = \int_{D^e} \boldsymbol{B}^{e^T} \boldsymbol{C} \boldsymbol{B}^e \, d\Omega.$$

La charge nodale équivalente induite par les forces massiques est

$$\boldsymbol{p}^e = \int_{D^e} \boldsymbol{V}^{e^T} \boldsymbol{P} \, d\Omega,$$

et la charge induite par les forces surfaciques

$$r^e = \int_{S_2^e} V^{e^T} F_2 \, dS.$$

Montrons le déroulement du calcul de la matrice de rigidité sur l'exemple d'un élément triangulaire plan avec une interpolation linéaire. Considérons l'élément triangulaire avec les nœuds i, j, m numérotés dans le sens antihorair (fig. 90). Pour les déplacements, neous avons

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y, \\ v &= \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y. \end{aligned} \qquad (2.16)$$

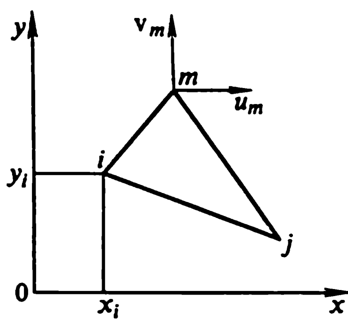


Fig. 90. Elément triangulaire plan

Exprimons maintenant les coefficients indéterminés $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_6$ par les valeurs des déplacements aux nœuds (ici $q^e = \{u_i, v_i, u_j, v_j, u_m, v_m\}$). A cette fin résolvons le système d'équations

$$\begin{aligned} u_i &= \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i, \\ u_j &= \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 y_j, \\ u_m &= \alpha_1 + \alpha_2 x_m + \alpha_3 y_m, \\ v_i &= \qquad\qquad\qquad \alpha_4 + \alpha_5 x_i + \alpha_6 y_i, \\ v_j &= \qquad\qquad\qquad \alpha_4 + \alpha_5 x_j + \alpha_6 y_j, \\ v_m &= \qquad\qquad\qquad \alpha_4 + \alpha_5 x_m + \alpha_6 y_m. \end{aligned} \qquad (2.17)$$

Pour le déplacement u dans l'élément considéré nous obtenons alors

$$u = \frac{1}{2\Delta} [(a_i + b_i x + c_i y) u_i + (a_j + b_j x + c_j y) u_j + \\ + (a_m + b_m x + c_m y) u_m], \qquad (2.18)$$

où

$$\begin{aligned} a_i &= x_j y_m - x_m y_j, \\ b_i &= y_j - y_m = y_{jm}, \\ c_i &= x_m - x_j = x_{mj}; \end{aligned} \qquad (2.19)$$

les autres coefficients sont obtenus par permutation cyclique des indices, et

$$2\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix} \tag{2.20}$$

(Δ est la surface de l'élément).

De façon analogue v est représenté à l'aide de v_i, v_j, v_m.

Ainsi la matrice $\boldsymbol{u}^e$ est trouvée, c'est évidemment une matrice 2×6. L'opérateur matriciel $\boldsymbol{A}$ dans ce cas est égal à

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix}, \tag{2.21}$$

et

$$\boldsymbol{B}^e = \frac{1}{2\Delta} \begin{pmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_m & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_m \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_m & b_m \end{pmatrix}. \tag{2.22}$$

Dans le cas d'un état de contrainte plan la matrice de l'élasticité $\boldsymbol{C}_1$ est

$$\boldsymbol{C}_1 = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}. \tag{2.4'}$$

Comme suivant l'épaisseur de la plaque (δ) les contraintes et les déplacements ne varient pas, la matrice de rigidité se calcule par intégration sur la surface de l'élément :

$$\boldsymbol{K} = \delta \int_S \boldsymbol{B}^{e^T} \boldsymbol{C}_1 \boldsymbol{B}^e \, dx\, dy. \tag{2.23}$$

La matrice de rigidité peut être écrite sous la forme

$$\boldsymbol{K} = \begin{pmatrix} K_{ii} & K_{ij} & K_{im} \\ K_{ij} & K_{jj} & K_{jm} \\ K_{im} & K_{jm} & K_{mm} \end{pmatrix}, \tag{2.23'}$$

où chaque élément K_{pq} définit un bloc 2×2 :

$$K_{pq} = \boldsymbol{B}_p^{e^T} \boldsymbol{C}_1 \boldsymbol{B}_q^e \Delta, \tag{2.24}$$

ici B_r^e $(r = p, q)$:

$$B_r^e = \frac{1}{2\Delta}\begin{pmatrix} b_r & 0 \\ 0 & c_r \\ c_r & b_r \end{pmatrix}, \tag{2.25}$$

est un bloc de la matrice B^e. Le calcul des charges équivalentes induites par les forces massiques ne présente pas de difficultés non plus. Pour les forces de la pesanteur, en particulier, on obtient qu'elles sont équiréparties entre les trois nœuds.

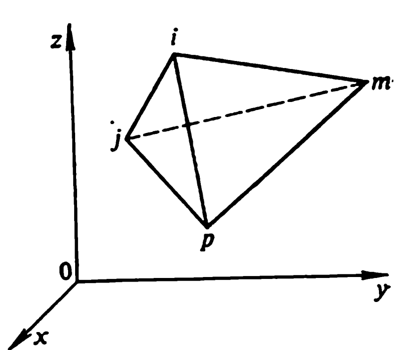


Fig. 91. Elément tétraédrique.

Pour un élément tétraédrique spatial (fig. 91) les calculs sont analogues. Les composantes u, v, w du vecteur déplacement sont dans ce cas

$$u = \frac{1}{6\Delta_1}\sum_{q=i,j,m,p}(a_q + b_q x + c_q y + d_q z)\,u_q,$$

$$v = \frac{1}{6\Delta_1}\sum_{q=i,j,m,p}(a_q + b_q x + c_q y + d_q z)\,v_q, \tag{2.26}$$

$$w = \frac{1}{6\Delta_1}\sum_{q=i,j,m,p}(a_q + b_q x + c_q y + d_q z)\,w_q,$$

où

$$6\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i & z_i \\ 1 & x_j & y_j & z_j \\ 1 & x_m & y_m & z_m \\ 1 & x_p & y_p & z_p \end{vmatrix}, \quad a_i = \begin{vmatrix} x_j & y_j & z_j \\ x_m & y_m & z_m \\ x_p & y_p & z_p \end{vmatrix}, \tag{2.27}$$

$$b_i = -\begin{vmatrix} 1 & y_j & z_j \\ 1 & y_m & z_m \\ 1 & y_p & z_p \end{vmatrix}, \quad c_i = -\begin{vmatrix} x_j & 1 & z_j \\ x_m & 1 & z_m \\ x_p & 1 & z_p \end{vmatrix},$$

$$d_i = -\begin{vmatrix} x_j & y_j & 1 \\ x_m & y_m & 1 \\ x_p & y_p & 1 \end{vmatrix},$$

Δ_1 est le volume du tétraèdre. Les autres coefficients s'obtiennent par permutation cyclique des indices. Pour un bloc typique 3×3 de la matrice de rigidité K_{pq} $(r = p, q)$ nous avons

$$K_{pq} = B_p^{e\,T} C B_q^e \Delta_1 ; \quad B_r^e = \frac{1}{6\Delta_1} \begin{pmatrix} b_r & 0 & 0 \\ 0 & c_r & 0 \\ 0 & 0 & d_r \\ c_r & b_r & 0 \\ 0 & d_r & c_r \\ d_r & 0 & b_r \end{pmatrix}. \tag{2.28}$$

Dans le cas plan d'un rectangle à quatre nœuds l'approximation est de la forme

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x & y & xy & & & & \\ & & & & 1 & x & y & xy \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_8 \end{Bmatrix}, \tag{2.29}$$

et dans le cas spatial d'un parallélépipède à huit nœuds, de la forme

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x & y & z & xy & xz & yz & xyz & & & & & & \\ & & & & & & & & 1 & x & y \ldots & & & \\ & & & & & & & & & & & 1 & x & y \ldots \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{24} \end{Bmatrix}. \tag{2.30}$$

Donnons un exemple de calculs effectués par la méthode des éléments finis. On montre sur la figure 92 la partition en éléments pour le problème de la distribution des contraintes autour d'une ouverture circulaire, l'état de contrainte étant homogène à des distances élevées de l'ouverture. La solution numérique obtenue par cette méthode était comparée à la solution analytique. Les résultats sont représentés sur la figure 93 (la solution exacte est représentée en continu, la solution obtenue par la méthode des éléments finis, par des petits cercles). D'une manière analogue à ce qui a été fait pour le problème unidimensionnel, on peut employer une approximation par des polynômes d'Hermite assurant la continuité du nombre voulu de dérivées dans la solution, ce qui permet d'aborder les problèmes relatifs à des plaques et des enveloppes *). Il existe également des procédés

*) Le fait est que les fonctionnelles apparaissant dans les problèmes relatifs à des plaques et des enveloppes comportent des dérivées d'ordre supérieur à un, de sorte qu'une interpolation linéaire conduit à une erreur.

permettant de construire aisément les éléments par une approximation par un polynôme de n'importe quel degré (on utilise pour cela des polynômes de Legendre et certains autres). Sont connues également des méthodes d'approximation qui jouent pour les éléments à frontière curviligne.

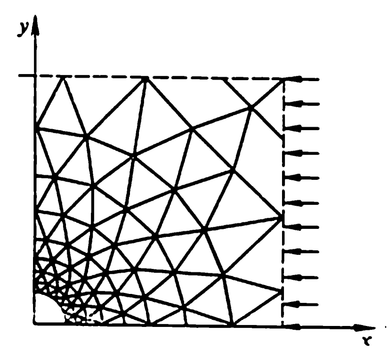


Fig. 92. Discrétisation dans le cas d'un domaine à ouverture circulaire.

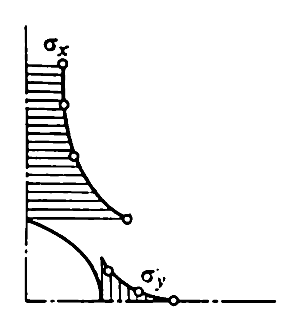


Fig. 93. Comparaison de la solution exacte et de la solution obtenue par la méthode des éléments finis.

Tous les raisonnements précédents concernaient les problèmes statiques, mais la méthode des éléments finis se généralise naturellement aux problèmes dynamiques. Cherchons à obtenir pour ceux-ci l'équation en éléments finis. Si l'on utilise le principe de D'Alembert il faut considérer l'équilibre du corps sous l'action de toutes les forces extérieures, y compris les forces d'inertie. Ceci signifie que dans la fonctionnelle (2.2) apparaîtra un terme complémentaire $\int\limits_D \rho \boldsymbol{u}^T \ddot{\boldsymbol{u}}\, d\Omega$ (rigoureusement parlant, la fonctionnelle ne représente plus l'énergie potentielle complète puisqu'elle comporte le terme exprimant l'énergie cinétique). Il suffit de calculer cette intégrale complémentaire sur un élément seulement. Nous avons

$$\boldsymbol{u}^e(x, y, z, t) = \boldsymbol{V}^e(x, y, z)\, \boldsymbol{q}^e(t),$$

$$\int\limits_{D^e} \rho \boldsymbol{u}^T \ddot{\boldsymbol{u}}\, d\Omega = \boldsymbol{q}^{e^T} \int\limits_{D^e} \boldsymbol{V}^{e^T} \boldsymbol{V}^e\, d\Omega\, \ddot{\boldsymbol{q}}^e = \boldsymbol{q}^{e^T} \boldsymbol{M}^e \ddot{\boldsymbol{q}}^e. \tag{2.31}$$

$\boldsymbol{M}^e = \int\limits_{D^e} \rho \boldsymbol{V}^{e^T} \boldsymbol{V}^e\, d\Omega$ est matrice de masse de l'élément (analogue à la matrice de masse (13.28) du chapitre I dans le cas unidimen-

sionnel). La matrice globale de masse se calcule par la même procédure que la matrice de rigidité. La recherche du point stationnaire de la fonctionnelle F^h, compte tenu des forces d'inertie, conduit maintenant à un système d'équations différentielles ordinaires

$$M\ddot{q} + Kq = F \tag{2.32}$$

auxquelles il est nécessaire d'adjoindre les conditions initiales

$$q(0) = p, \quad \dot{q}(0) = r. \tag{2.33}$$

La résolution du système d'équations (2.32) n'est pas triviale pour la fonction vectorielle $F(t)$ de forme générale et se complique beaucoup dans le cas de systèmes d'ordre élevé. Le procédé usuel de sa résolution est la construction de schémas aux différences finies par rapport au temps. Divisant l'intervalle considéré du temps en petits intervalles Δt et notant q^i le vecteur q au i-ième nœud du réseau, on peut obtenir une approximation de la dérivée seconde, dont la plus simple est la suivante :

$$\ddot{q} = \frac{1}{\Delta t^2}(q^{i+1} + q^{i-1} - 2q^i). \tag{2.34}$$

La substitution de cette expression dans le système initial d'équations différentielles donnera un système d'équations algébriques pour déterminer q^{i+1} au moyen des valeurs déjà calculées de q^{i-1} et q^i.

Dans les cas assez fréquents où le second membre est une fonction de la forme $F(t) = Ff(t)$ (F est un vecteur et $f(t)$ une fonction régulière périodique), il est préférable de construire la solution par développement suivant les fonctions propres. Voyons-en les détails. Admettons pour plus de simplicité $f(t) = \cos \lambda t$ et $\dot{q}(0) = 0$. La solution générale du système

$$M\ddot{q} + Kq = F\cos \lambda t \tag{2.35}$$

représente la somme de la solution particulière du système avec second membre et de la solution générale du système homogène, cette dernière étant représentable sous la forme

$$q(t) = \sum_j A_j q^{(j)} \cos \omega_j t, \tag{2.36}$$

où A_j sont les coefficients indéterminés, $q^{(j)}$ et ω_j les vecteurs propres et les valeurs propres de l'équation

$$Kq - \omega^2 Mq = 0, \tag{2.37}$$

ordonnés dans l'ordre de croissance des ω_j.

Les vecteurs propres sont bi-orthogonaux [78]

$$q^{(i)T} M q^{(j)} = 0 \quad (i \neq j) \tag{2.38}$$

et peuvent être normalisés. Ceci nous donne

$$q^{(i)T} M q^{(j)} = \delta_{ij}. \qquad (2.39)$$

De la dernière égalité et de (2.35) nous obtenons aisément

$$q^{(i)T} K q^{(j)} = \omega_i^2 \delta_{ij}. \qquad (2.40)$$

Utilisant les relations (2.39), (2.40), montrons que la fonction

$$q^*(t) = \cos \lambda t \sum_j q^{(j)} \frac{q^{(j)T} F}{\omega_j^2 - \lambda^2} \qquad (2.41)$$

est la solution particulière de (2.35) dans le cas où $\lambda \neq \omega_j$ pour tous les j. En effet, portant $q^*(t)$ dans (2.35) et multipliant par $q^{(i)T}$, nous obtenons

$$- q^{(i)T} \lambda^2 \cos \lambda t \sum_j M q^{(j)} \frac{q^{(j)T} F}{\omega_j^2 - \lambda^2} +$$

$$+ q^{(i)T} \lambda^2 \cos \lambda t \sum_j K q^{(j)} \frac{q^{(j)T} F}{\omega_j^2 - \lambda^2} = q^{(i)T} F \cos \lambda t. \qquad (2.42)$$

Utilisant (2.39) et (2.40) et simplifiant par $\cos \lambda t$, nous obtenons l'identité

$$- \lambda^2 \frac{q^{(i)T} F}{\omega_j^2 - \lambda^2} + \omega_i^2 \frac{q^{(i)T} F}{\omega_i^2 - \lambda^2} = q^{(i)T} F. \qquad (2.43)$$

Ainsi la solution générale de (2.35) est

$$q(t) = \sum_j A_j q^{(j)} \cos \omega_j t + \sum_j q^{(j)} \frac{q^{(j)T} F}{\omega_j^2 - \lambda^2} \cos \lambda t =$$

$$= \sum_j q^{(j)} \left(A_j \cos \omega_j t + \frac{q^{(j)T} F}{\omega_j^2 - \lambda^2} \cos \lambda t \right). \qquad (2.44)$$

Développons ensuite le vecteur $p = q(0)$ suivant les vecteurs propres $q^{(j)}$:

$$p = \sum_j q^{(j)} [q^{(j)T} M p]. \qquad (2.45)$$

Il est facile de s'assurer de la validité de cette équation en la multipliant à gauche par $q^{(j)^T}M$. Comparant alors les $q(0)$ donnés par (2.44) et (2.45), nous obtenons

$$A_j = q^{(j)^T}Mp - \frac{q^{(j)^T}F}{\omega_j^2 - \lambda^2}. \qquad (2.46)$$

Le nombre de termes à retenir dans la somme (2.44) dépend de la précision exigée et du caractère du problème considéré (conditions aux limites, forme du second membre, etc.). Dans la plupart des cas deux ou même un seul vecteur propre suffit. Ainsi, par exemple, lorsque $q(0) = 0$, on a

$$A_j = -\frac{q^{(j)^T}F}{\omega_j^2 - \lambda^2}. \qquad (2.47)$$

Si par ailleurs ω_j croît rapidement avec l'accroissement de j, alors A_j tend vers zéro (tandis que le numérateur reste borné en vertu de (2.39)).

Ainsi dans cette approche le moment crucial est la résolution du problème généralisé des valeurs propres

$$Kq = \omega^2 Mq. \qquad (2.37)$$

La principale difficulté est liée au fait que l'on doit traiter non pas une seule matrice, mais plusieurs. Toutefois il est possible de ramener ce problème à un problème avec une matrice :

$$M^{-1}Kq = \omega^2 q, \qquad (2.37')$$

mais alors on se prive du principal avantage des matrices de la méthode des éléments finis : leur forme n-diagonale, et d'autre part l'inversion de la matrice M n'est pas une opération simple quand elle est d'ordre élevé. Les méthodes de résolution du problème généralisé des fonctions propres, compte tenu de la spécificité de la méthode des éléments finis (la forme diagonale des matrices et la possibilité de ne rechercher qu'une partie du spectre) sont assez récentes. Ce sont les méthodes dites à itérations simultanées étudiées dans [17].

La méthode des éléments finis peut donc être étendue aux problèmes dynamiques de l'élasticité où l'on rencontre principalement des difficultés de nature numérique. Cette situation est typique pour la méthode des éléments finis : quoique le procédé de résolution est clair, très souvent (par exemple dans le cas des

problèmes spatiaux) l'ordre des systèmes d'équations qui apparaissent dicte ses restrictions et nombre de problèmes ne se laissent pas résoudre par cette méthode.

§ 3. Diffraction d'une onde élastique sur un disque circulaire

Nous allons appliquer la méthode des différences finies à la résolution d'un problème d'élasticité à symétrie axiale [140]. L'équation de base sera l'équation (4.4'''), ch. III, où la composante u_φ est nulle et les autres composantes ne dépendent pas de la coordonnée φ :

$$\mu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+(1-\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial r\,\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{u}{r^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+\mu\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{\mu}{r}\frac{\partial w}{\partial r}+(1-\mu)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial z}\right)=\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \tag{3.1}$$

Les composantes du tenseur des contraintes s'expriment par les déplacements et leurs dérivées de la manière suivante :

$$\sigma_z=\frac{\partial w}{\partial z}+(1-2\mu)\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{u}{r}\right),$$

$$\tau_{rz}=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial r}\right). \tag{3.2}$$

Choisissons ensuite les unités de mesure de façon que la vitesse de propagation des ondes longitudinales et la densité du milieu soient égales à l'unité.

Soit dans l'espace élastique une cavité cylindrique $-H/2\leqslant z\leqslant H/2$, $r\leqslant 1$, où est inserrée une pièce solide de densité ρ (fig. 94). Suivant l'axe z, dans le sens contraire des valeurs positives, se propage une onde incidente longitudinale en forme de gradin flou *), qui imprime un mouvement au cylindre (l'inclusion).

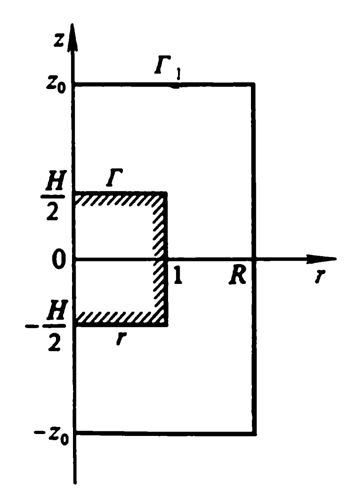


Fig. 94. Section méridionale. Espace à cavité cylindrique dans laquelle est insérée une pièce solide.

*) La présence d'un gradin donne lieu à des oscillations au voisinage du front.

Notons w_0 le déplacement du cylindre le long de l'axe z. L'équation du mouvement du cylindre est de la forme

$$\rho \frac{H}{2} \ddot{w}_0 = \int_\Gamma (r\sigma_r \, dr + \tau_{rz} \, dz). \tag{3.3}$$

Les valeurs des composantes des contraintes sont celles sur la surface frontière; Γ est le contour du cylindre dans le plan méridional. Toutes les constructions seront d'ailleurs effectuées dans la section méridionale. Soient Q_1 et Q_2 les déplacements du cylindre suivant la normale et la tangente au contour. Il est évident que sur la surface latérale $Q_1 = 0$, $Q_2 = w_0$ et sur les faces $Q_1 = w_0$, $Q_2 = 0$. Soient ensuite q_1 et q_2 les déplacements dans le milieu élastique sur la frontière avec le cylindre suivant la normale et la tangente à Γ.

Décrivons maintenant les conditions initiales. En avant du front d'onde le milieu est au repos et n'est soumis à aucun effort, en arrière du front d'onde il se trouve en état de déformation uniaxiale et $\sigma_z = 1$. On a

$$\begin{gathered} w_0(0) = \frac{dw_0(0)}{dt} = 0, \quad u(0, r, z) = \frac{du(0, r, z)}{dt} = 0, \\ \frac{\partial w(0, r, z)}{\partial z} = \frac{\partial w(0, r, z)}{\partial t} = f\left[\frac{1}{T}(H + T - 2z)\right], \end{gathered} \tag{3.4}$$

où

$$f(\xi) = 0 \quad (\xi \geqslant 1), \quad f(\xi) = 1 \quad (\xi \leqslant -1),$$

$$f(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi^2 \operatorname{sign} \xi) - \xi \quad (-1 < \xi < 1).$$

Donnons-nous sur le contour Γ des conditions de la forme

$$\begin{gathered} \frac{dq_2}{dt} = \frac{dQ_2}{dt} \quad (|\tau_{rz}| < k), \\ \tau_{rz} = k \operatorname{sign}\left(\frac{dq_2}{dt} - \frac{dQ_2}{dt}\right) \quad (|\tau_{rz}| = k), \end{gathered} \tag{3.5}$$

où k est un paramètre. Ainsi, quand la contrainte tangentielle atteint une certaine valeur, il y a glissement.

Passons à l'exposé du schéma de calcul. Un moment délicat est le passage à un domaine fini. Il sera choisi de dimensions

suffisamment grandes (le contour Γ_1 à la figure 94 : $z = \pm z_0$, $r = R$) pour pouvoir éliminer (dans une certaine mesure) l'influence de l'onde réfléchie sur ce contour par le choix des conditions aux limites. Les raisonnements conduits dans [18] à propos des oscillations d'une corde de dimension finie nous servent de point de départ. On montre dans [18] que pour certaines conditions aux limites, les ondes réfléchies disparaissent. La solution qu'on obtient coïncide avec celle trouvée pour une corde infinie.

Dans notre cas, nous partirons tout d'abord du fait que la frontière Γ_1 est tellement éloignée du cylindre que la perturbation peut être considérée comme un mouvement unidimensionnel. Avec les notations précédentes (sur le contour Γ) nous arrivons aux équations

$$\frac{\partial^2 q_1}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 q_1}{\partial n^2}, \quad \frac{\partial^2 q_2}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 q_2}{\partial n^2}. \tag{3.6}$$

Ici $\partial/\partial n$ est la dérivée suivant la normale à Γ_1. Précisons les conditions aux limites sur les parties de la frontière $|z| = z_0$:

$$q_1 = w - f\left(t - z + \frac{H}{2}\right), \quad q_2 = u,$$

et sur la partie de la frontière $r = R$:

$$q_1 = u, \quad q_2 = w - f\left(t - z + \frac{H}{2}\right).$$

La solution générale des équations (3.6) contient aussi bien une onde s'en allant dans l'infini qu'une onde venant de l'infini. Les dernières ne devant pas figurer, nous introduisons la restriction

$$\frac{\partial q_1}{\partial t} + \frac{\partial q_1}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial q_2}{\partial t} + \sqrt{\mu} \frac{\partial q_2}{\partial n} = 0. \tag{3.7}$$

Dans le but d'englober également le cas où le cylindre possède une densité arbitrairement petite, modifions l'équation (3.3) *), tenant en outre compte de l'énergie contenue dans la couche attenant à Γ (et délimitée par le contour Γ_2 : $|z| = 1/2\,(H + h)$, $r = 1 + h/2$:

$$\rho \frac{H}{2} \frac{d^2 w_0}{dt^2} + \iint\limits_{D_1} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} r\,dr\,dz =$$

$$= \int\limits_{\Gamma_2} \left(r \frac{\partial w}{\partial z} dr + \mu z \frac{\partial w}{\partial r} dz\right) + (1 + \mu)\left(1 + \frac{h}{2}\right)(u_a - u_b), \tag{3.8}$$

---

*) La modification est nécessaire afin de pouvoir effectuer les calculs pour $\rho \ll 1$ puisque pour $\rho = 0$ l'équation (3.3) dégénère.

où D_1 est le domaine compris entre Γ et Γ_2 ; u_a et u_b les valeurs de u dans les coins supérieur et inférieur du contour Γ_2. Ici h est une constante, qui définira désormais le pas du réseau. Notons les conditions sur l'axe de symétrie

$$u = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial r} = 0. \tag{3.9}$$

L'instant initial sera $t = H/2 - z_0 < 0$ (c'est-à-dire l'instant où l'onde entre dans le domaine de calcul), nous poserons à cet instant les conditions initiales nulles.

Partitionnons le domaine compris entre les contours Γ et Γ_2 en carrés de côté h. Pour plus de commodité le pas h sera choisi de façon à ce que les nœuds du réseau soient situés sur les contours Γ et Γ_1 (dans ce cas $1/h$, H/h, z_0/h et R/h sont des nombres entiers). Le temps se comptait avec des intervalles t_0.

Dans la suite nous aurons besoin de valeurs dans la couche moyenne (t), dans la couche supérieure ($t + t_0$) et inférieure ($t - t_0$). Pour l'approximation des dérivées aux points internes on utilise les dérivées centrales obtenues par la méthode des différences (14.3), ch. I. Récrivons celles-ci sous une forme quelque peu autre :

$$\begin{aligned} \delta_z f_{ij} &= \frac{1}{2h}(f_{i,j+1} - f_{i,j-1}), \\ \delta_{zz} f_{ij} &= \frac{1}{h^2}(f_{i,j+1} - 2f_{i,j} + f_{i,j-1}), \\ \delta_{zr} f_{ij} &= \frac{1}{4h^2}(f_{i+1,j+1} + f_{i-1,j-1} - f_{i+1,j-1} - f_{i-1,j+1}). \end{aligned} \tag{3.10}$$

Pour les équations (3.1) nous obtenons alors les analogues aux différences finies

$$\begin{aligned} \delta_{tt} u &= \mu\,\delta_{zz} u + \delta_{rr} u + (1-\mu)\,\delta_{rz} w + \frac{1}{hi}\,\delta_r u - \frac{1}{(hi)^2}\,u, \\ \delta_{tt} w &= \delta_{zz} w + \mu\,\delta_{rr} w + \frac{\mu}{hi}\,\delta_r w + (1-\mu)\,\delta_{rz} u + \frac{(1-\mu)}{hi}\,\delta_z u. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Ce schéma est un schéma à trois couches du deuxième ordre de précision. Sa stabilité exige l'observation de la condition de Courant (cf. § 14, ch. I).

Construisons un schéma aux différences finies pour les conditions aux limites. L'analogue aux différences finies de la condition (3.6) s'écrit

$$\delta_t q_1 + \delta_n q_1 = 0, \quad \delta_t q_2 + \sqrt{\mu}\,\delta_n q_2 = 0. \tag{3.12}$$

Comme nous utilisons des différences centrales, parmi les points figurant dans (3.12) sont ceux situés en dehors du domaine de calcul. Pour les éliminer servons-nous des équations (3.6). Nous obtenons l'approximation des conditions aux limites sous la forme

$$
\begin{gathered}
\frac{2}{h}(\delta_t q_1 + \delta_n q_1) + \delta_{tt} q_1 - \delta_{nn} q_1 = 0, \\
\frac{2\sqrt{\mu}}{h}(\delta_t q_2 + \sqrt{\mu}\,\delta_n q_2) + \delta_{tt} q_2 - \mu\,\delta_{nn} q_2 = 0.
\end{gathered}
\tag{3.13}
$$

Pour transformer la condition (3.3) utilisons de même les différences centrales. Nous aurons alors

$$
\begin{aligned}
\frac{\rho(H+h)}{2}\,\delta_{tt} w_0 = \sum_{\Gamma_3} r(\delta_z^{1/2} w + \mu\,\delta_r^{1/2} w) + \\
+ \frac{h}{2}\sum_{\Gamma_3} \delta_{tt} w + \frac{(1-\mu)}{2}\left(1+\frac{h}{2}\right)\left[u\left((t,\ 1+h,\ h+\frac{H}{2}\right) - \right. \\
\left. -u\left(t,\ 1+h,\ -h-\frac{H}{2}\right)\right] + O(h^2).
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

Ici Γ_3 est le segment de droite $r = 1$; $-H/2 < z < H/2$; l'indice supérieur $1/2$ indique qu'on a procédé à l'approximation avec le pas $h/2$. Le calcul de $\delta_{tt} w$ a été effectué pour la couche inférieure. Pour l'équation (3.3) on a utilisé une approximation du premier ordre *). Pour les autres conditions aux limites on a utilisé une approximation du deuxième ordre.

La condition sur l'axe de symétrie prend alors la forme

$$
u = 0, \quad \delta_r w = 0. \tag{3.15}
$$

La condition sur la frontière du cylindre $q_1 = Q_1$ reste inchangée et la condition (3.5) devient

$$
\begin{gathered}
\delta_t(q_2 - Q_2) = 0 \quad \left(|\delta_n q_1| < \frac{k}{\mu}\right), \\
\delta_n q_2 = \frac{k}{\mu}\,\mathrm{sign}\,\delta_t(q_2 - Q_2) \quad \left(|\delta_n q_2| = \frac{k}{\mu}\right).
\end{gathered}
\tag{3.16}
$$

---

*) Une approximation d'ordre plus élevé aurait conduit à l'approximation non explicite de (3.3).

La solution de ce système non linéaire sera :

$$q_2 = -y_1 \quad \text{si} \quad |y_1 + y_2| < k_2 ;$$
$$q_2 - y_2 = k_2 \ \operatorname{sign}(y_1 + y_2) \quad \text{si} \quad |y_1 + y_2| \geqslant k_2. \tag{3.17}$$

Ici

$$k_2 = \frac{2hk_1}{\mu},$$

$$y_1 = \frac{2}{3} h\delta_t^1(q_2 - Q_2) - q_2,$$

$$y_2 = \frac{2}{3} h\delta_t^1 q_2 + q_2.$$

A la dernière étape il ne reste qu'à déterminer directement les déplacements pour la couche supérieure.

Donnons les résultats des calculs effectués pour des paramètres fixés $h = 0{,}2$; $z_0 = 2{,}5$; $R = 8{,}0$. Sur la figure 95 est représentée la vitesse $v(t)$, les courbes *1*, *2*, *3*, *4* correspondant à $\rho = 0{,}5$; 1 ; 2 ; 4, avec $H = 1$; $\mu = 0{,}3$; $T = 0{,}5$; $k = 0$. Sur la figure 96

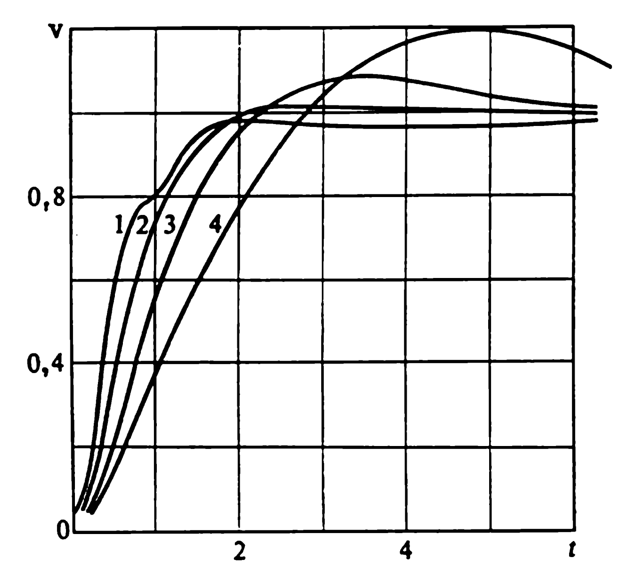


Fig. 95. Vitesse $v(t)$ en fonction des paramètres essentiels.

sont représentées les contraintes $\sigma_z(r)$ sur la face supérieure à l'instant où elles commencent à se stabiliser. Les courbes *1, 2, 3* correspondent à $H = 0{,}5$; 1 ; 2 et $\mu = 0{,}3$; $\rho = 1$; $k = 0$.

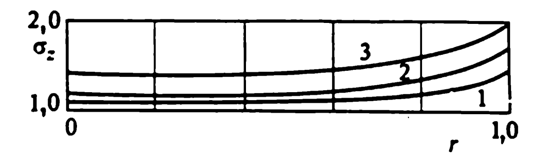


Fig. 96. Contrainte σ_z sur la face supérieure.

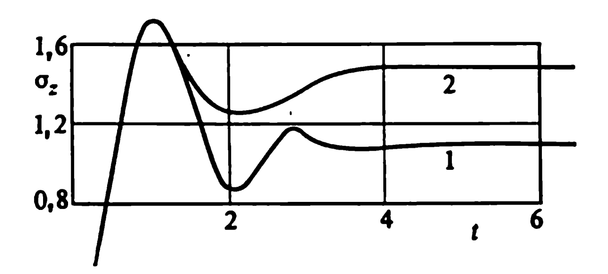


Fig. 97. Relation $\sigma_z(t)$ au centre de la face supérieure.

Sur la figure 97 est représentée la variation de la contrainte $\sigma_z(t)$ avec le temps au centre de la face supérieure. Les courbes *1, 2* correspondent à $\mu = 0{,}1$ et 0,5 avec $H = 2$; $\rho = 1$; $T = 0{,}25$.

§ 4. Propagation des ondes élastiques dans un cylindre circulaire

Considérons le problème dynamique à symétrie axiale de l'élasticité pour un cylindre circulaire [62]. Soit R_0 le rayon du cylindre, l sa longueur et z l'axe de rotation. Récrivons l'équation du mouvement (4.2), ch. II, sous une forme quelque peu modifiée :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= \rho \frac{\partial v_r}{\partial t}, \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} &= \rho \frac{\partial v_z}{\partial t}, \end{aligned} \qquad (4.1)$$

où v_r, v_z sont les composantes du vecteur de vitesse.

Récrivons également la loi de Hooke (3.30″), ch. II, sous une forme modifiée, l'ayant dérivée par rapport au temps :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_r}{\partial r} &= \frac{1}{2\mu}\left[\frac{\partial \sigma_r}{\partial t} - \left(1 - \frac{2\mu}{3\lambda + 2\mu}\right)\frac{\partial p}{\partial t}\right],\\
\frac{v_r}{r} &= \frac{1}{2\mu}\left[\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial t} - \left(1 - \frac{2\mu}{3\lambda + 2\mu}\right)\frac{\partial p}{\partial t}\right],\\
\frac{\partial v_r}{\partial z} &+ \frac{\partial v_z}{\partial r} = \frac{1}{\mu}\,\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial t},\\
\frac{\partial v_z}{\partial z} &= \frac{1}{2\mu}\left[\frac{\partial \sigma_z}{\partial t} - \left(1 - \frac{2\mu}{3\lambda + 2\mu}\right)\frac{\partial p}{\partial t}\right],\\
p &= \frac{1}{3}(\sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z).
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Nous obtenons de la sorte un système fermé d'équations par rapport aux contraintes et aux vitesses.

Nous partirons des conditions initiales et aux limites suivantes. Pour $t = 0$ toutes les contraintes et les vitesses sont identiquement nulles. La surface cylindrique est libre. Sur la face $z = 0$ la vitesse $v_z \equiv v_0$ et $\tau_{r\theta} \equiv 0$. Pour $z = l$, le vecteur des contraintes s'annule. Les effets les plus intéressants dans ce problème étant liés à la propagation d'ondes, aussi est-il préférable d'utiliser pour sa résolution numérique la méthode des surfaces caractéristiques proposée dans [63]. Cette méthode permet de décrire de la manière la plus complète le mouvement ondulatoire et d'« émousser » le moins possible le saut de la solution sur les fronts des ondes en propagation.

Ramenons les systèmes (4.1) et (4.2) à une forme adimensionnelle en introduisant les variables suivantes :

$$\begin{gathered}
\tilde{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_0}, \quad \tilde{v}_i = \frac{v_i}{v_0}, \quad \tilde{t} = \frac{ta}{R_0}, \quad \tilde{r} = \frac{r}{R_0}, \quad \tilde{z} = \frac{z}{R_0},\\
\sigma_0 = \rho a v_0, \quad a^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad \beta = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}, \quad \alpha = \frac{\beta}{2(1+\nu)}.
\end{gathered} \tag{4.3}$$

Dans la suite nous omettrons le signe tilde dont sont affectées les grandeurs adimensionnelles. Nous obtiendrons alors un système que nous représenterons sous forme matricielle

$$\boldsymbol{A}_t\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \boldsymbol{A}_r\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial r} + \boldsymbol{A}_z\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial z} = \boldsymbol{B}, \tag{4.4}$$

où $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(v_r, v_z, \sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{rz})$ est le vecteur solution, $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}(-(\sigma_r - \sigma_\theta)/r, -\tau_{rz}/r, 0, v_r/r, 0, 0)$ est le vecteur des seconds membres, $\boldsymbol{A}_t, \boldsymbol{A}_r, \boldsymbol{A}_z$ sont des matrices symétriques de la forme

$$\boldsymbol{A}_t = \left(\begin{array}{cc|ccc|c} -1 & 0 & & 0 & & 0 \\ 0 & -1 & & & & \\ \hline & & \alpha & -\alpha\nu & -\alpha\nu & \\ & 0 & -\alpha\nu & \alpha & -\alpha\nu & 0 \\ & & -\alpha\nu & -\alpha\nu & \alpha & \\ \hline & 0 & & 0 & & -\beta \end{array}\right),$$

$$\boldsymbol{A}_r = \left(\begin{array}{cc|ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & & & & \\ \hline 0 & 1 & & 0 & & 0 \end{array}\right),$$

$$\boldsymbol{A}_z = \left(\begin{array}{cc|ccc|c} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & & & \\ \hline 1 & 0 & & 0 & & 0 \end{array}\right).$$

Formons l'équation des surfaces caractéristiques $\varphi(r, z, t) = 0$ pour le système (4.4). Elle est de la forme

$$\left| \boldsymbol{A}_t \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \boldsymbol{A}_r \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \boldsymbol{A}_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right| = 0. \tag{4.5}$$

L'équation (4.5) peut être récrite sous une forme plus commode :

$$|\boldsymbol{A}_r n_r + \boldsymbol{A}_z n_z - D\boldsymbol{A}_t| = 0, \tag{4.5'}$$

où $n_i = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right) \Big/ |\text{grad } \varphi|$ sont les cosinus directeurs de la normale n à la surface caractéristique $\varphi(r, z, t) = 0$, et $D = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) \Big/ |\text{grad } \varphi|$, la vitesse de propagation de la surface caractéristique $\varphi = 0$ dans l'espace rz.

En développant le déterminant, l'équation (4.5′) prend la forme :

$$[D^2 - (n_r^2 + n_z^2)]\left[D^2 - \frac{1}{\beta}(n_r^2 + n_z^2)\right] D^2 = 0. \qquad (4.5'')$$

On voit que la surface conique (4.5″) se décompose en deux cônes circulaires et une droite que l'on peut considérer comme un cône dégénéré. Remarquons qu'à la différence du cas d'une seule équation d'onde (cf. § 9, ch. I) on a ici trois cônes circulaires. Au premier cône correspond une onde longitudinale se propageant à la vitesse $D_p = \pm 1$, au second cône une onde transversale se propageant à la vitesse $D_s = \pm \beta^{-1/2}$ et au cône dégénéré $D_{st} = 0$ une onde stationnaire.

Cherchons les conditions de compatibilité sur les surfaces caractéristiques. Déterminons pour cela les vecteurs propres ω, dits vecteurs propres à gauche de la matrice $A = A_r n_r + A_z n_z$ par rapport à la matrice *) A_t :

$$\omega A - \omega D A_t = 0. \qquad (4.6)$$

A chaque valeur propre D correspond une famille monoparamétrique de vecteurs propres à gauche qu'on tire sous forme explicite de l'équation (4.6) et dont les composantes sont :

$$\begin{aligned}
&\omega_p\left(n_r,\ n_z,\ 1 - \frac{2}{\beta} n_z^2,\ 1 - \frac{2}{\beta},\ 1 - \frac{2}{\beta} n_r^2,\ \frac{2}{\beta} n_r n_z\right),\\
&\omega_s\left(-n_z,\ n_r,\ -2\frac{n_r n_z}{\beta^{1/2}},\ 0,\ \frac{2}{\beta^{1/2}} n_r n_z,\ \frac{n_r^2 - n_z^2}{\beta^{1/2}}\right),\\
&\omega_{st}^{(1)}(0,\ 0,\ n_z^2,\ 0,\ n_r^2,\ 0),\\
&\omega_{st}^{(2)}(0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0).
\end{aligned} \qquad (4.7)$$

Multipliant le système initial (4.4) par chacun des vecteurs propres (4.7) nous obtenons les relations de compatibilité sur les

*) Dans le cas où la matrice A_t est une matrice unité, le vecteur ω est simplement vecteur propre de la matrice A.

surfaces caractéristiques :

$$\omega_p A_t \left(\frac{\partial u}{\partial t} + n_r \frac{\partial u}{\partial r} + n_z \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \omega_p K \left(n_r \frac{\partial u}{\partial z} - n_z \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \omega_p B, \tag{4.8}$$

$$\omega_s A_t \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \beta^{-1/2} \left(n_r \frac{\partial u}{\partial r} + n_z \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] + \\ + \omega_s K \left(n_r \frac{\partial u}{\partial z} - n_z \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \omega_s B, \tag{4.9}$$

$$\omega_{st}^{(1)} A_t \frac{\partial u}{\partial t} + \omega_{st}^{(1)} K \left(n_r \frac{\partial u}{\partial z} - n_z \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \omega_{st}^{(1)} B, \tag{4.10}$$

$$\omega_{st}^{(2)} A_t \frac{\partial u}{\partial t} + \omega_{st}^{(2)} K \left(n_r \frac{\partial u}{\partial z} - n_z \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \omega_{st}^{(2)} B, \tag{4.11}$$

où

$$K = n_r A_z - n_z A_r.$$

Examinons, par exemple, la relation (4.8), valable sur le cône d'ondes longitudinales. Cette relation contient des dérivées par rapport à deux variables s et l. La variable s varie le long de la bicaractéristique (c'est-à-dire le long de la ligne de tangence du plan caractéristique de normale n avec le cône d'ondes longitudinales) et la variable l, suivant la direction qui lui est orthogonale :

$$\frac{\partial}{\partial s_i} = \frac{\partial}{\partial t} + D_i \left(n_r \frac{\partial}{\partial r} + n_z \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad \frac{\partial}{\partial l} = n_r \frac{\partial}{\partial z} - n_z \frac{\partial}{\partial r}.$$

Les transformations effectuées ont permis de passer des relations différentielles contenant trois variables à des relations contenant seulement deux variables. Ecrivons les relations (4.8) à (4.11) en coordonnées curvilignes n et l liées aux cônes caractéristiques. En ces coordonnées les équations prennent la forme la plus simple :

$$-\frac{\partial}{\partial s_1}(v_n + \sigma_n) + \frac{\partial}{\partial l}\left(\tau_{nl} + \frac{\nu}{1-\nu} v_l \right) = \omega_p B, \tag{4.8'}$$

$$-\frac{\partial}{\partial s_2}(\beta^{1/2}\tau_{nl} + v_l) + \frac{\partial}{\partial l}(\sigma_l + \beta^{-1/2} v_n) = \omega_s B, \tag{4.9'}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\sigma_n - \frac{3\nu}{1+\nu} p \right) = \frac{2}{\beta} \frac{\partial v_l}{\partial l}, \tag{4.10'}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\sigma_\theta - \frac{3\nu}{1+\nu} p \right) = \frac{2}{\beta} \frac{v_r}{r}. \tag{4.11'}$$

Ici v_n, v_l sont les composantes de la vitesse dans les directions n et l,

$$\sigma_n = \sigma_r n_r^2 + 2\tau_{rz} n_r n_z + \sigma_z n_z^2,$$

$$\sigma_l = \sigma_r n_z^2 + \sigma_z n_r^2 - 2 n_r n_z \tau_{rz},$$

$$\tau_{nl} = (\sigma_z - \sigma_r) n_r n_z + \tau_{rz}(n_r^2 - n_z^2),$$

les composantes du tenseur des contraintes.

L'étape suivante consiste à choisir dans le système obtenu six relations linéairement indépendantes relativement à six fonctions inconnues. Dans le cas d'un nombre de variables supérieur à deux le système de relations caractéristiques convenables n'est pas unique. Il est naturel d'en retenir celles qui donnent lieu à des équations aux différences finies simples, permettant d'utiliser un réseau régulier et vérifiant la condition nécessaire de stabilité de Courant.

Les relations (4.8′) à (4.11′) prennent la forme la plus simple quand la normale n coïncide avec la normale aux plans de coordonnées, ce qui correspond aux valeurs $n_r = 0$, $n_z = \pm 1$ et $n_z = 0$, $n_r = \pm 1$.

Ayant pour but d'obtenir un réseau régulier et d'éviter des interpolations intermédiaires, nous proposerons le choix suivant de relations caractéristiques pour rechercher la solution aux points internes. Attachons quatre relations (4.8′) au cône d'ondes longitudinales pour $n_r = 0$, $n_z = \pm 1$ et $n_z = 0$, $n_r = \pm 1$. Ces plans forment une pyramide régulière tétraédrique circonscrite au cône et tangente à celui-ci suivant ses quatre bicaractéristiques. La base de la pyramide forme un carré de côtés coïncidant avec les lignes de coordonnées (fig. 98, *a*). Les deux autres équations sont prises dans les plans caractéristiques (tangents au cône dégé-

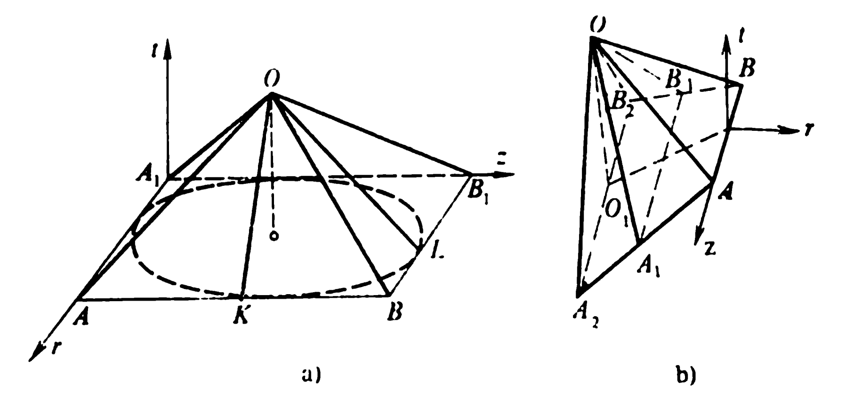


Fig. 98. Cellule élémentaire.

néré) passant par l'axe de la pyramide et les diagonales de sa base ($n_r = 1/\sqrt{2}$, $n_z = \pm 1/\sqrt{2}$). Ces six relations constituent un système d'équations linéaire indépendant, équivalent au système initial. Il peut être représenté sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial s_1}(v_r \pm \sigma_r) \pm \frac{\partial}{\partial z}\left(\tau_{rz} \pm \frac{\nu}{1-\nu} v_z\right) = \mp \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} - \frac{\nu}{1-\nu}\frac{v_r}{r},$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta_1}(v_z \pm \sigma_z) \pm \frac{\partial}{\partial r}\left(\tau_{rz} \pm \frac{\nu}{1-\nu} v_r\right) = \mp \frac{\tau_{rz}}{r} - \frac{\nu}{1-\nu}\frac{v_r}{r}, \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial l}\left[6\nu\alpha p - \frac{3}{2}(\sigma_r + \sigma_z - 2\tau_{rz})\right] + \frac{\partial}{\partial l_1}(v_r \mp v_z) = 0,$$

où

$$\frac{\partial}{\partial s_1} = \frac{\partial}{\partial r} \mp \frac{\partial}{\partial l}, \quad \frac{\partial}{\partial \eta_1} = \frac{\partial}{\partial z} \mp \frac{\partial}{\partial l}, \quad \frac{\partial}{\partial l_1} = \frac{\partial}{\partial z} \mp \frac{\partial}{\partial r}.$$

Comme on a déjà noté, dans chacune de ces relations figurent des dérivées rien que de deux variables, ce qui constitue un avantage pour l'intégration numérique. Les équations (4.12) se laissent représenter sous forme de relations intégrales en réalisant l'intégration suivant la face de la pyramide pour laquelle l'équation correspondante est remplie. Appliquant la formule de Green nous transformons l'intégrale de surface en intégrale de contour, ce qui permet d'obtenir des relations intégrales ne contenant pas de dérivées. La première relation (4.12), par exemple, prend la forme

$$\int_C (v_r \pm \sigma_r)\,dz \pm \left(\tau_{rz} \pm \frac{\nu}{1-\nu} v_z\right) ds_1 =$$

$$= \mp \int_\Sigma \left(\frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} \pm \frac{\nu}{1-\nu}\frac{v_r}{r}\right) d\Sigma, \quad (4.13)$$

où $\sum$ est la surface du triangle AOB, et C son contour. Utilisant telle ou telle formule d'intégration nous obtenons une représentation aux différences finies des équations (4.13). D'une manière analogue sont transformées les autres relations (4.12).

Appliquons sur le domaine occupé par le corps dans le plan rz à l'instant du temps $t = kh$ un réseau carré de pas h aux points nodaux ih, jh. A l'instant du temps suivant $t + \Delta t = (k+1)h$, la solution sera obtenue aux points nodaux du réseau, décalé d'un demi-pas suivant r et z, c'est-à-dire aux points de coordonnées $(i + 1/2)\,h$, $(j + 1/2)\,h$. En utilisant, par exemple, la formule des

trapèzes, les équations (4.13) peuvent être écrites avec un tel réseau :

$$a^{k+1}_{i+1/2,\, j+1/2} = \frac{1}{2}\Big[a^k_{i+1,j} + a^k_{i+1,\,j+1} + c^k_{i+1,\,j+1} - c^k_{i+1,\,j} + \frac{h}{3}\Big(L^k_{1_{i+1/2,\,j+1}} + L^k_{1_{i+1,\,j}} + L^{k+1}_{1_{i+1/2,\,j+1/2}}\Big)\Big],$$

$$b^{k+1}_{i+1/2,\,j+1/2} = \frac{1}{2}\Big[b^k_{i,\,j+1} + b^k_{i,j} + d^k_{i,j} - d^k_{i,j+1} + \frac{h}{3}\Big(L^k_{2_{i,\,j+1}} + L^k_{2_{i,\,j}} + L^{k+1}_{2_{i+1/2,\,j+1/2}}\Big)\Big], \tag{4.14}$$

$$v_r = \frac{1}{2}(a+b), \quad \sigma_r = \frac{1}{2}(a-b), \quad L_{1,2} = \pm\frac{\sigma_r - \sigma_0}{r} - \frac{\nu}{1-\nu}\,\frac{v_r}{r}.$$

De ces deux équations sont déterminées v_r et σ_r.

Remarquons que le système (4.14) d'équations aux différences finies par rapport aux inconnues a^{k+1}, $b^{k+1}, \ldots$ est de forme diagonale, ce qui réduit considérablement les calculs (en comparaison de l'application immédiate de la méthode des différences finies aux équations différentielles initiales).

Voyons comment se construit le schéma aux différences au voisinage de la frontière. Les conditions aux limites dans le cas général peuvent être écrites sous la forme

$$a_1 v_\nu + b_1\sigma_\nu = f_1, \quad a_2 v_\tau + b_2\tau_{\tau\nu} = f_2, \tag{4.15}$$

où les indices ν et τ correspondent à la normale et à la tangente à la frontière.

Remarquons que pour l'élaboration du schéma aux différences l'utilisation des relations caractéristiques sur la frontière est d'importance particulière. Le fait est que pour la construction de l'analogue aux différences finies des équations (4.12) aux points frontières on obtient un nombre de relations supérieur au nombre d'inconnues. Seule la forme caractéristique canonique par rapport à la frontière fournit un schéma aux différences univoque et correct pour le calcul des points frontières. Pour l'obtenir il faut dans toutes les équations caractéristiques (4.8′) à (4.11′) poser la normale n coïncidant avec la normale ν à la frontière. Nous obtenons quatre relations, une pour chacune des formules (4.8′)-(4.11′) auxquelles on adjoint deux conditions aux frontières, en tout six conditions.

Effectuons les calculs pour la surface latérale du cylindre ($r = R_0$). A la forme canonique correspondent les équations (4.8′) à (4.11′) pour $n_r = 1$, $n_z = 0$. Les remplaçant comme dans le cas du point interne par des relations intégrales, intégrant suivant la surface des triangles AOB, A_1OB_1 et A_2OB_2 (fig. 98, *b*) situés respectivement dans les plans tangents aux cônes d'ondes longitudinales, transversales et à la frontière, nous obtenons les équations aux différences finies qui suivent.

Pour le triangle AOB sera valable la première relation (4.14). Intégrant la relation (4.9′) suivant la surface du triangle A_1OB_1 nous obtenons

$$(\beta^{1/2}\tau_{rz} + v_z)_O = \frac{1}{2}\left[(\beta^{-1/2}\tau_{rz} + v_z)_{B_1}\right] + \frac{\beta^{-1/2}}{2}\left[(\beta^{1/2}\sigma_z + v_r)_{B_1}\right] -$$

$$- \frac{h\beta^{-1/2}}{3(1 + \beta^{-1/2})}\left[\left(\frac{\tau_{rz}}{r}\right)_{A_1} + \left(\frac{\tau_{rz}}{r}\right)_{B_1} + \left(\frac{\tau_{rz}}{r}\right)_O\right]. \quad (4.16)$$

Pour le triangle A_2OB_2, nous trouvons

$$q_0 = \frac{1}{6}(q_{A_2} + q_{B_2} + 4q_O) - \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)^2}\left[(v_z)_{A_2} - (v_z)_{B_2}\right] +$$

$$+ \frac{h(1-2\nu)\nu}{4(1-\nu)^2}\left[\left(\frac{v_r}{r}\right)_{A_2} + \left(\frac{v_r}{r}\right)_{B_2} + \left(\frac{v_r}{r}\right)_O\right],$$

où

$$q = \sigma_z - \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_r.$$

Les points angulaires sont calculés d'après les mêmes relations que les points frontières, indépendamment pour chacune des surfaces formant l'angle, puis on prend la moyenne des valeurs obtenues.

Quelques mots sur la stabilité du schéma aux différences que nous avons construit. Il est évident que la condition de Courant est automatiquement vérifiée, mais pour notre schéma elle n'est qu'une condition nécessaire. On trouvera dans [62] une étude complète de la stabilité du schéma pour un problème bidimensionnel à symétrie axiale.

Elucidons ce qui vient d'être dit sur l'exemple d'un problème unidimensionnel. Construisons les solutions particulières du problème homogène sous la forme

$$v = \bar{v}e^{ik_1lh}e^{\rho n\Delta t} \quad (\lambda = e^{\rho\Delta t}).$$

Nous obtiendrons alors pour $\bar{r}$ un système d'équations algébrique homogène

$$
\begin{gathered}
(\lambda - e^{ik_1h})\,a = 0, \quad (\lambda - e^{-ik_1h})\,b = 0,\\
2(\lambda - \cos k_1h)\,\bar{\sigma}_z + \frac{\nu i}{1-\nu}\sin k_1h(\bar{a} + b) = 0,\\
\left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right)c + \frac{2i}{\alpha}(\bar{a} + b)\sin k_1 h = 0,\\
c = 6\bar{p}\nu - \frac{\beta}{\alpha}(\bar{\sigma}_r + \bar{\sigma}_z), \qquad (4.17)\\
(\lambda - \cos k_1h)\,\bar{r}_z + \frac{2\alpha}{\beta}\,i\sin kh\,\bar{\tau}_{rz} = 0,\\
\left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right)\bar{\tau}_{rz} - \frac{2i}{\alpha}\,\bar{r}_z\sin kh = 0.
\end{gathered}
$$

De la condition de la nullité du déterminant nous trouvons une équation pour λ. Les solutions de l'équation (4.17) ne seront bornées que si est vérifiée la condition

$$\max_i \lambda_i \leqslant 1,$$

dite *condition de Neumann*. Démontrons que cette condition est réalisée. En effet, le système (4.17) se décompose en deux systèmes, le premier par rapport aux grandeurs $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{\sigma}_z$ et $\bar{c}$, et le second par rapport à $\bar{v}_z$ et $\bar{\tau}_{rz}$.

Les nombres caractéristiques du premier système sont

$$\lambda_1 = e^{ik_1h}, \quad \lambda_2 = e^{-ik_1h}, \quad \lambda_3 = \cos k_1h, \quad \lambda_{4,5} = \pm 1.$$

On en déduit que les ondes harmoniques correspondant aux racines λ_1 et λ_2 se propagent sans affaiblissement ni dispersion, de sorte que les quantités σ_r et v_r sur les fronts d'ondes de discontinuité cylindriques longitudinales ne seront pas étalées, en même temps σ_z sera lissé.

Pour le second système caractérisant la variation des quantités τ_{rz} et v_z dans les ondes cylindriques transversales l'équation caractéristique s'écrit :

$$\lambda^3 - \lambda^2\cos k_1h - \lambda\left(1 - \frac{2}{\beta}\sin^2 k_1h\right) + \cos k_1h = 0.$$

Ses racines vérifient la condition $\max_i |\lambda_i| < 1$. Cette équation montre que sur les fronts d'ondes de cisaillement il y aura étalement du saut.

Notons que lorsqu'il y a deux vitesses de propagation d'ondes, aucun schéma aux différences n'est susceptible de traduire fidèlement, sans introduire un « étalement », les deux ondes apparaissant dans le problème du choc sur la face du cylindre d'une onde se propageant à une vitesse constante $v_r = V_0$. Comme les ondes longitudinales sont plus importantes pour le problème considéré, on a intérêt à les décrire avec le plus de précision.

La méthode numérique exposée a été appliquée à la résolution du problème du choc sur la face du cylindre à une vitesse constante.

Sur la figure 99 est montrée la variation de la vitesse longitudinale v_z suivant la longueur du cylindre pour $r = 0$ aux différents instants du temps t. Le cylindre est suffisamment long pour qu'il n'y ait pas réflexion d'ondes sur la face $z = l$. Dans l'exemple considéré on prenait $V_0 = 5$; $\nu = 0{,}3$. Avant l'arrivée des ondes réfléchies de la surface latérale du cylindre, l'onde longitudinale se propageait sans distorsion, conservant sa forme en gradin, à une vitesse $a = D_p = ((\lambda + 2\mu)/\rho)^{1/2}$. Avec l'arrivée

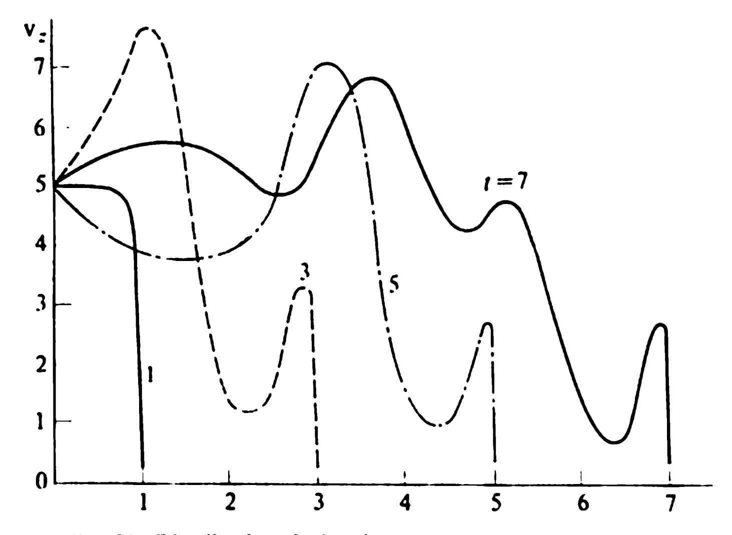


Fig. 99. Distribution de la vitesse v_z pour un cylindre infini.

des ondes latérales le tableau de propagation de l'impulsion se complique. Déjà pour $t = 3R/c$ l'impulsion se décompose en précurseur, impulsion de faible durée se propageant en soliton à une vitesse a, et en impulsion principale dont le front se propage à une vitesse proche de la valeur $a_0 = (E/\rho)^{1/2}$ donnée par la théorie des barres. L'amplitude du précurseur est légèrement inférieure à la vitesse appliquée et varie peu avec le temps.

L'impulsion principale a la forme d'un gradin auquel se superposent des oscillations ; la vitesse est maximale en arrière du front et dépasse la valeur appliquée V_0 d'environ 40-45%. On trouvera dans [64] la solution asymptotique pour le problème considéré lorsque $t \gg R_0/c$.

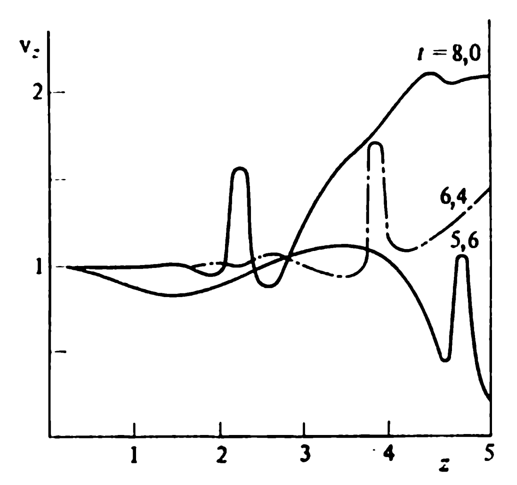


Fig. 100. Distribution de la vitesse v_z pour un cylindre de longueur finie.

Déjà pour $t \sim 10\, R_0/c$ la solution numérique obtenue se comporte comme la solution théorique, tandis que la vitesse v_z dépasse V_0 de moins de 30 %.

On montre sur la figure 100 la distribution des vitesses suivant l'axe $r = 0$ dans un cylindre de longueur finie $l = 5R_0$ après la réflexion de l'onde longitudinale sur la face libre du cylindre aux différents instants du temps. Après réflexion sur la face libre, la vitesse croît rapidement et s'approche de la valeur prédite par la théorie élémentaire des barres. Le tableau est qualitativement le même pour d'autres valeurs de r, mais l'amplitude des oscillations décroît sous l'effet des ondes latérales à mesure qu'on s'éloigne de l'axe. La contrainte σ_z au point $r = z = 0$ de la surface de contact baisse de la valeur $\rho a V_0$ à la valeur $\rho a_0 V_0$ fournie par la théorie des barres et oscille ensuite autour de cette valeur avec une période d'oscillation proche dans l'exemple considéré de $4R_0/a$.

§ 5. Diffraction d'une onde élastique sur une cavité sphérique

Soit dans l'espace une cavité sphérique de rayon r_0. De l'infini arrive une onde longitudinale plane d'intensité σ_0. Considérons l'interaction de cette onde avec la cavité sphérique [68]. Nous choisissons naturellement un repère sphérique (r, θ, φ), dirigeant l'axe $\theta = 0$ de telle sorte que le problème soit à symétrie axiale.

Introduisons les grandeurs adimensionnelles

$$\sigma'_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\lambda + 2\mu}, \quad u'_i = \frac{u_i}{a}, \quad r' = \frac{r}{r_0}, \quad t' = \frac{ta}{r_0}. \tag{5.1}$$

Ecrivons le système d'équations dynamiques de l'élasticité pour les contraintes et les vitesses (pour plus de commodité nous omettrons dans la suite les crans), supposant les unités de mesure telles que $a = 1$ et $\rho = 1$:

$$\begin{aligned}
\dot{\sigma}_r &= u_{,r} + (1 - 2\mu')\frac{v_{,r}}{r} + (1 - 2\mu')\left(\frac{2u}{r} + \frac{v \cot\theta}{r}\right),\\
\dot{\sigma}_\theta &= (1 - 2\mu')\, u_{,r} + \frac{v_{,\theta}}{r} + \frac{2(1 - \mu')u}{r} + \frac{(1 - 2\mu')v \cot\theta}{r},\\
\dot{\sigma}_\varphi &= (1 - 2\mu')\left(u_{,r} + \frac{v_{,\theta}}{r}\right) + \frac{2(1 - \mu')u}{r} + \frac{v \cot\theta}{r},\\
\dot{\tau} &= \mu'\left(\frac{u_{,\theta}}{r} + v_{,r} - \frac{v}{r}\right),\\
\dot{u} &= \sigma_{r,r} + \frac{\tau_{,\theta}}{r} + \frac{2\sigma_r - \sigma_\theta - \sigma_\varphi + \tau \cot\theta}{r},\\
\dot{v} &= \tau_{,r} + \frac{\sigma_{\theta,\theta}}{r} + \frac{3\tau + (\sigma_\theta - \sigma_\varphi)\cot\theta}{r}
\end{aligned} \tag{5.2}$$

$$\left(\mu' = \frac{b^2}{a^2} = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu}\right).$$

Ecrivons maintenant les conditions initiales et aux limites. Dans le domaine perturbé (avant l'arrivée de l'onde incidente) les contraintes et les vitesses sont les suivantes:

$$\begin{aligned}
\sigma_r &= -\sigma_0(1 - 2\mu' \sin^2\theta) f(\xi), & \tau &= \sigma_0\, \mu' \sin 2\theta\, f(\xi),\\
\sigma_\theta &= -\sigma_0(1 - 2\mu' \cos^2\theta) f(\xi), & u &= -\sigma_0 f(\xi) \cos\theta,\\
\sigma_\varphi &= -\sigma_0(1 - 2\mu') f(\xi), & v &= \sigma_0 f(\xi) \sin\theta,
\end{aligned} \tag{5.3}$$

où $f(\xi)$ est une fonction donnée (éventuellement discontinue) caractérisant la forme de l'onde incidente. Dans la partie restante les vitesses et les contraintes sont nulles. Supposant la cavité libre de contraintes, nous obtenons

$$\sigma_r = 0, \quad \tau = 0 \quad (r = 1). \tag{5.4}$$

Passons à de nouvelles fonctions que nous définirons par les formules

$$p = \frac{\sigma_r + \sigma_\theta}{2}, \quad q = \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{2}, \quad \Phi = \sigma_\varphi - \frac{1 - 2\mu'}{1 - \mu'} p. \tag{5.5}$$

Le système d'équations peut alors être écrit, en notations matricielles, comme un système symétrique du premier ordre

$$A^t_{y,t} + A^r_{y,r} + A^0_{y,0} + B = 0, \tag{5.6}$$

où A^t est une matrice définie positive, A^r et A^0 des matrices symétriques dont l'expression détaillée est :

$$y = \begin{pmatrix} u \\ v \\ p \\ q \\ \Phi \\ \tau \end{pmatrix}, \quad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1-\mu'} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu'} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu'} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu'} \end{pmatrix},$$

$$A^r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.6'}$$

$$A^0 = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} 0 & 0 & m_1 & -3 & -s & 1 \\ 0 & 0 & m_1 s & s & 0 & s \\ m_2 & m_3 s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_4 & m_4 s & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

où

$$m_1 = \frac{\mu'}{1-\mu'}, \quad m_2 = \frac{3\mu'-2}{1-\mu'}, \quad m_3 = \frac{2\mu'-1}{1-\mu'}, \quad m_4 = \frac{4\mu'-3}{1-\mu'},$$

$$s = \cot\theta.$$

Nous chercherons la solution sous la forme d'une somme de deux termes, l'un traduisant l'onde incidente et l'autre, l'onde réfléchie. Toutes les grandeurs se rapportant à l'onde réfléchie seront affectées de l'indice inférieur « 1 ». Pour le vecteur y_1 nous obtenons alors les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{aligned} p_1 + q_1 &= (1 - 2\mu' \sin^2 \theta) f(\xi), \\ \tau_1 &= -\mu' \sin 2\theta f(\xi). \end{aligned} \tag{5.7}$$

La nullité des conditions initiales est évidente.

L'emploi de la méthode des différences finies nécessite que le domaine de calcul soit limité par une frontière extérieure, comme au § 3. Il est commode de choisir pour frontière une sphère de rayon suffisamment grand $r = R_1$, où l'on peut donner les conditions aux limites sous la forme :

$$p_1 + q_1 + u_1 = 0, \quad \tau_1 + \sqrt{\mu'}\, v_1 = 0. \tag{5.8}$$

En vertu de la symétrie axiale, on doit avoir sur l'axe $\theta = 0$ les conditions suivantes :

$$\tau = 0, \quad v = 0, \quad p_{,\theta} = q_{,\theta} = f_{,\theta} = u_{,\theta} = 0. \tag{5.9}$$

Passons à la description du schéma de calcul. Introduisons un réseau de mailles

$$r_i = (1 + \Delta\theta)^i \quad (i = 0, 1, \ldots, M),$$

$$\theta_j = \Delta\theta j \quad (j = 0, 1, \ldots, N).$$

Le pas variable Δr_i (suivant la coordonnée r) se choisit de façon que les côtés des mailles aient environ la même longueur.

Les fonctions p, q, τ et f ne seront déterminées qu'aux nœuds du réseau, alors que u et v le seront au centre des mailles. Afin d'améliorer la précision d'approximation suivant le temps, les vitesses u et v seront calculées aux intervalles de temps $t = \Delta t(k - 0{,}5)$, et les fonctions p, q, τ et f aux intervalles de temps $t = \Delta t k$ $(k = 0, 1, \ldots, K)$ *). Pour les points internes on utilise les différences centrales par rapport aux coordonnées et par rapport au temps.

Comme la frontière du domaine de calcul passe par les nœuds du réseau, les vitesses ne sont soumises à aucunes conditions. La condition (5.9) se remplace par la condition

$$\tau = 0, \quad \delta_\theta p = \delta_\theta q = \delta_\theta f = 0, \tag{5.10}$$

*) Avec cela il est possible d'utiliser les différences centrales suivant le temps, ce qui conduit à une précision du deuxième ordre.

où δ_θ est un opérateur approchant la dérivée première par rapport à l'angle θ avec une précision du deuxième ordre *).

Les conditions (5.7) ne suffisent pas pour déterminer les quatre grandeurs p, q, τ, f sur la couche supérieure suivant le temps lorsque $r = 1$. Aussi faut-il adjoindre à celles-ci deux relations bicaractéristiques pour le système (5.2), ce qui nous donne les conditions

$$p + q = (1 - 2\,\mu' \sin^2\theta) f(\xi), \quad \tau = -\,\mu' \sin 2\theta f(\xi),$$

$$\begin{aligned} &\mu' p_{,t} - (1 - \mu')\, q_{,t} - 2\mu'(1 - \mu') \frac{1}{r} v_{,\theta} - \\ &\qquad - \mu'(3 - 4\mu') \frac{u}{r} - \mu'(1 - 2\mu') \frac{v}{r} \cot\theta = 0, \end{aligned} \tag{5.11}$$

$$f_{,t} - \mu' \frac{3 - 4\mu'}{1 - \mu'} \left(\frac{u}{r} + \frac{v}{r} \cot\theta \right) = 0.$$

Aux conditions sur la frontière $r = R_1$ étaient adjointes également les relations bicaractéristiques.

Afin d'éliminer l'oscillation de la solution numérique au voisinage du front d'onde, on appliquait un « lissage » à trois points avec des coefficients dépendant du gradient de la solution à lisser (cf. par exemple [123]).

Donnons à titre d'exemple les résultats d'un nombre de calculs. Sur la figure 101 est montrée la variation de la contrainte σ_0 dans le temps à un point de l'équateur. Les courbes *1*, *2*, *3* correspondent aux valeurs $\mu' = 0{,}25$; 0,3 et 0,33.

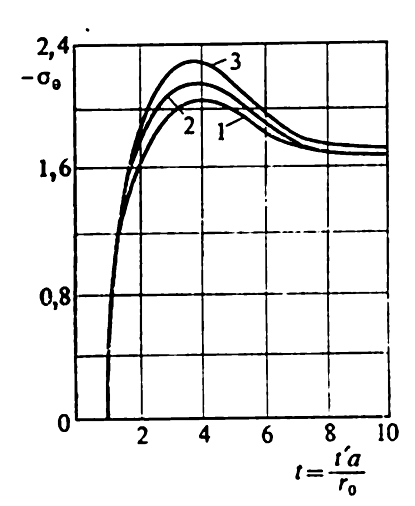


Fig. 101. Relation $\sigma_\theta(t)$.

Sur la figure 102 sont montrées les courbes $\sigma_\theta(\theta)$ à différents instants du temps. Les courbes *1*, *2*, *3* correspondent aux instants du temps $t = 2{,}094$; 4,188 et 6,983. La courbe marquée de petits cercles est la solution du problème statique.

Sur la figure 103 sont représentées les courbes de niveau pour $|\tau_{max}|$ lorsque $t = 0{,}837$.

*) $\delta_\theta f = [4f(\theta_0 + \Delta\theta) - f(\theta_0 + 2\Delta\theta) - 3f(\theta_0)]/2\Delta\theta$.

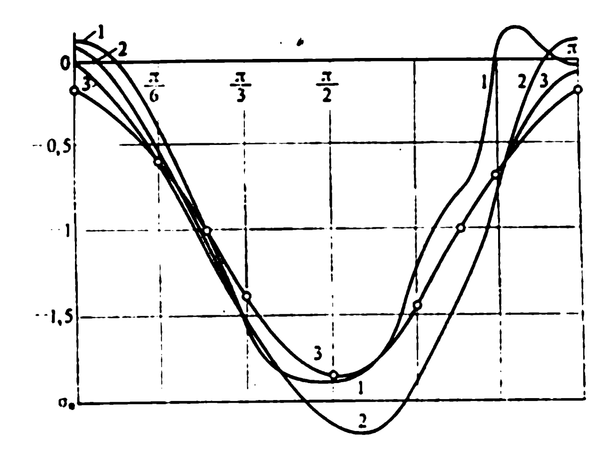


Fig. 102. Distribution de σ_0 suivant l'angle.

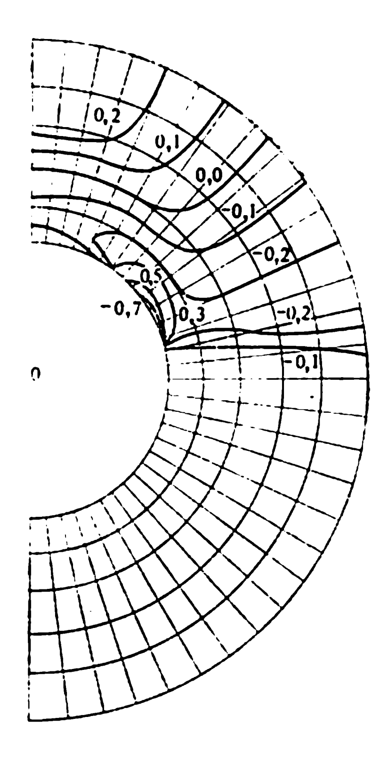


Fig. 103. Lignes de niveau $|\tau_{max}|$.

SUPPLÉMENT

1. Solution de Kelvin-Somigliana pour un corps anisotrope

La méthode des potentiels peut être utilisée pour la résolution des problèmes spatiaux de l'élasticité dans le cas d'anisotropie de type général. Pour la construction des équations intégrales correspondantes il faut (comme dans le cas d'un milieu isotrope) disposer d'une solution de Kelvin-Somigliana.

Exposons la méthode d'élaboration d'une telle solution. Nous partirons de la loi de Hooke (3.15), ch. II. Portant ces relations dans l'équation (4.4), ch. II, nous obtenons les équations d'équilibre en déplacements pour un milieu anisotrope

$$c_{pqrs}u_{r,sq} + P_p = 0. \tag{1}$$

Afin de construire dans tout l'espace les solutions des équations (1) appliquons les transformations de Fourier (4.17), ch. I, par rapport à toutes les trois variables. Les transformées s'écrivent

$$k_{pr}(\lambda)\bar{u}_r(\lambda) = \bar{P}_p(\lambda), \tag{2}$$

où

$$k_{pr}(\lambda) = c_{pqrs}\lambda_q\lambda_s.$$

Soient $k^*_{pr}(\lambda)$ les éléménts de la matrice inverse de la matrice d'éléments k_{pr} i.e.

$$k^*_{pt}(\lambda)k_{pr}(\lambda) = \delta_{tr}\ ^{*}). \tag{3}$$

Multipliant les équations (2) par la matrice d'éléments $k^*_{pq}(\lambda)$ nous arrivons d'emblée à la représentation de la transformée des déplacements, soit

$$\bar{u}_q(\lambda) = k^*_{pq}(\lambda)\bar{P}_p(\lambda). \tag{4}$$

Appliquant la transformation de Fourier inverse, nous rétablissons les expressions des déplacements :

$$(2\pi)^3 u_q(x) = \int P_p(y)\,dy_1\,dy_2\,dy_3 \int e^{i[\lambda_\alpha(y_\alpha - x_\alpha)]}\,k^*_{pq}(\lambda)\,d\lambda_1\,d\lambda_2\,d\lambda_3. \tag{5}$$

---

*) La matrice inverse existe car l'énergie de déformation est une forme définie positive.

Simplifions la représentation obtenue mettant à profit le fait qu'on cherche la solution pour une force concentrée unité (dans ce cas une composante seulement est non nulle). Nous avons

$$(2\pi)^3 u_{pq}(x) = \int e^{-i\lambda_\alpha x_\alpha} k^*_{pq}(\lambda)\, d\lambda_1 d\lambda_2 d\lambda_3. \tag{6}$$

Passons maintenant de l'intégrale suivant tout l'espace à une intégrale suivant une sphère de rayon unité, en introduisant les coordonnées $\eta (\lambda_p = \rho\eta_p)$. Remarquons d'autre part que les éléments de la matrice $k_{pq}(\lambda)$ sont des fonctions homogènes d'ordre 2. Par conséquent, les éléments de la matrice $k^*_{pq}(\lambda)$ seront d'ordre -2. Aussi

$$(2\pi)^3 u_{pq}(x) = \lim_{R\to\infty} \int k^*_{pq}(\eta)\, d\omega \int_{\rho=0}^{R} \cos(\rho\eta_\alpha x_\alpha) d\rho =$$

$$= \lim_{R\to\infty} \int k^*_{pq}(\eta) \frac{\sin R\,\eta_\alpha x_\alpha}{\eta_b x_b}\, d\omega. \tag{7}$$

Introduisons sur la sphère les coordonnées θ, φ, le rayon $\theta = 0$ sera dirigé le long du vecteur x_p. Ceci permet de simplifier davantage l'expression (7) :

$$(2\pi)^3 r u_{pq}(x) = \lim_{R\to\infty} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^{1} k_{pq}(\mu, \theta) \frac{\sin Rr\mu}{\mu}\, d\mu. \tag{8}$$

Ici

$$r^2 = x_\alpha x_\alpha, \quad \mu = \cos\theta, \quad k_{pq}(\mu, \theta) = k^*_{pq}(\eta).$$

Faisant appel à l'égalité (4.14), ch. I, nous obtenons

$$(2\pi)^3 r u_{pq}(x) = \pi \int_0^{2\pi} k_{pq}(0, \varphi)\ d\varphi. \tag{9}$$

Récrivons la représentation (9) sous une forme plus commode :

$$u_{pq}(x) = \frac{1}{8\pi^2 r} \oint k^*_{pq}(\eta)\, ds. \tag{10}$$

L'intégrale est prise suivant l'arc de cercle de rayon unité dont le plan est perpendiculaire au vecteur x_p et dont le centre coïncide avec l'origine des coordonnées.

Dans le cas où le milieu est transversalement anisotrope *) les intégrales de (10) se calculent sous forme explicite.

*) On appelle transversalement anisotrope un milieu possédant un seul plan d'isotropie. Dans ce cas les constantes élastiques non nulles s'expriment par cinq constantes.

Traitons le problème plan de l'élasticité pour un corps anisotrope. Supposons qu'en chaque point d'une plaque les propriétés élastiques du milieu sont symétriques par rapport à un parallèle au plan médian. Comme dans le cas isotrope (cf. § 4, ch. III), nous supposerons que les efforts s'exerçant sur les bords de la plaque le sont dans le plan médian. Passant alors à des grandeurs moyennisées suivant l'épaisseur de la plaque, nous obtenons les relations entre déformations et contraintes

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= c_{11}\sigma_x + c_{12}\sigma_y + c_{16}\tau_{xy}, \\ \varepsilon_y &= c_{12}\sigma_x + c_{22}\sigma_y + c_{26}\tau_{xy}, \\ \gamma_{xy} &= c_{16}\sigma_x + c_{26}\sigma_y + c_{66}\tau_{xy}. \end{aligned} \tag{11}$$

Comme dans (4.20), ch. III, introduisons la fonction d'Airy $U(x, y)$. La substitution des contraintes dans les équations de compatibilité des déformations conformément à (11) nous conduit à une équation pour la fonction d'Airy:

$$c_{22}\frac{\partial^4 U}{\partial x^4} - 2c_{26}\frac{\partial^4 U}{\partial x^3 \partial y} + \\ + (2c_{12} + c_{66})\frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} - 2c_{16}\frac{\partial^4 U}{\partial x\, \partial y^3} + c_{11}\frac{\partial^4 U}{\partial y^4} = 0. \tag{12}$$

L'équation (12) s'avère biharmonique dans le cas isotrope.

Soient μ_k les racines de l'équation caractéristique

$$c_{11}\mu^4 - 2c_{16}\mu^3 + (2c_{12} + c_{66})\mu^2 - 2c_{26}\mu + c_{22} = 0. \tag{13}$$

Comme on sait (cf. par exemple [128]), les racines de cette équation sont toujours complexes (elles sont purement imaginaires pour un milieu isotrope). Soit

$$\mu_1 = \alpha + i\beta, \quad \mu_2 = \alpha - i\beta, \quad \mu_3 = \gamma + i\delta, \quad \mu_4 = \gamma - i\delta. \tag{14}$$

Dans le cas de racines distinctes la solution générale de l'équation (12) se représente sous la forme

$$U(x, y) = u_1(z_1) + \overline{u_1(z_1)} + u_2(z_2) + \overline{u_2(z_2)}, \tag{15}$$

où $u_1(z_1)$ et $u_2(z_2)$ sont des fonctions des variables complexes $z_1 = x + \mu_1 y$ et $z_2 = x + \mu_2 y$.

Donnons les expressions des contraintes et des déplacements

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2\mathrm{Re}[\mu_1^2\Phi_1'(z_1) + \mu_2^2\Phi_2'(z_2)], \\ \sigma_y &= 2\mathrm{Re}[\Phi_1'(z_1) + \Phi_2'(z_2)], \\ \tau_{xy} &= -2\mathrm{Re}[\mu_1\Phi_1'(z_1) + \mu_2\Phi_2'(z_2)], \\ u &= 2\mathrm{Re}[p_1\Phi_1(z_1) + p_2\Phi_2(z_2)], \\ v &= 2\mathrm{Re}[q_1\Phi_1(z_1) + q_2\Phi_2(z_2)], \end{aligned} \tag{16}$$

où

$$\Phi_1(z_1) = \frac{du_1}{dz_1}, \quad \Phi_2(z_2) = \frac{du_2}{dz_2},$$
$$p_1 = c_{11}\mu_1^2 + c_{12} - c_{16}\mu_1, \quad p_2 = c_{11}\mu_3 + c_{12} - c_{16}\mu_3,$$
$$q_1 = c_{12}\mu_1 + \frac{c_{22}}{\mu_1} - c_{26}, \quad q_2 = c_{12}\mu_3 + \frac{c_{22}}{\mu_3} - c_{26}.$$

2. Sur une approche relative à des milieux viscoélastiques

On appelle *viscoélastique* un milieu dont la rhéologie se décrit par les équations

$$\sigma_{ij}(t) = E_{ijkl}(t)\varepsilon_{kl}(t) \quad (i,\ j = 1, 2, 3), \tag{1}$$

où

$$E_{ijkl}\varepsilon_{kl} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}(t) + \int_0^t B_{ijkl}(t,\ \tau)\varepsilon_{kl}(\tau)\,d\tau, \tag{2}$$

les opérateurs intégraux dans (2) sont souvent dits *opérateurs du type héréditaire* (les intégrales de (2) sont en général comprises au sens de Stiltjes). On a les égalités

$$E_{ijkl} = E_{klij} = E_{klji} = E_{lkij}, \tag{3}$$

valables également pour les composantes C_{ijkl} et B_{ijkl}. Dans le cas où $B_{ijkl} \equiv 0$, les relations (1) sont équivalentes à la loi de Hooke.

Bornons-nous à une relation particulière ayant lieu pour les fonctions $B_{ijkl}(t,\ \tau)$ (et pour de nombreux matériaux rencontrés dans la pratique)

$$B_{ijkl}(t, \tau) = B_{ijkl}(t - \tau). \tag{4}$$

Nous allons considérer les problèmes de viscoélasticité dits *quasi statiques*. Dans ces problèmes les conditions aux limites (en déplacements ou en contraintes) varient dans le temps et les termes inertiels sont négligemment petits. Admettons que sur la partie S_1 de la surface frontière sont donnés les déplacements $F_1(y,\ t)$ et sur la partie S_2, les contraintes $F_2(y,\ t)$. On peut donner partout, évidemment, rien que des déplacements ou rien que des contraintes. Pour le problème mixte cependant on devra supposer qu'au cours de la déformation le bord des surfaces S_1 et S_2 reste inchangé.

Ainsi, un problème de viscoélasticité se ramène à la résolution des équations d'équilibre (4.4), ch. III, des équations de compatibilité des déformations et de l'équation d'état (1) avec la restriction (4). Effectuant dans ces équations les transformations de Laplace (4.30), ch. I, par rapport au temps, nous obtenons les relations en transformées entre contraintes et déformations. Les équations

d'équilibre, par exemple, se ramènent au système

$$\frac{\partial \overline{\sigma}_{ij}(p, x)}{\partial x_j} = 0. \tag{5}$$

Exactement de la même façon, les équations découlant des conditions de compatibilité des déformations coïncideront formellement avec les équations initiales si l'on remplace $\varepsilon_{ij}(x, t)$ par $\overline{\varepsilon}_{ij}(p, x)$. Les conditions aux limites en transformées sont les suivantes :

$$\overline{u}(p, x) = \overline{F}_1(p, x) \quad (x \in S_1),$$
$$T_\nu \overline{u}(p, x) = \overline{F}_2(p, x) \quad (x \in S_2). \tag{6}$$

En vertu du théorème de convolution (cf. § 4, ch. I), les relations entre $\overline{\sigma}_{ij}$ et $\overline{\varepsilon}_{ij}$ prendront la forme

$$\sigma_{ij}(p, x) = D_{ijkl}(p)\overline{\varepsilon}_{kl}(p, x) \tag{7}$$

où

$$D_{ijkl}(p) = C_{ijkl} + \overline{B}_{ijkl}(p). \tag{8}$$

On voit donc que les équations en transformées des contraintes et des déformations sont entièrement identiques aux équations de l'élasticité. Il est vrai que dans ces équations figure un paramètre, aux différentes valeurs duquel dans le problème auxiliaire de l'élasticité correspondront différentes valeurs de constantes élastiques (dites *modules instantanés*). Après la résolution du problème en transformées (plus exactement, d'une classe de problèmes pour les valeurs du paramètre p qu'on suppose utiliser dans la transformation inverse) il faut rétablir les grandeurs cherchées. On conçoit que le problème se simplifie si sa solution en transformées s'obtient sous forme explicite.

L'approche que nous venons d'exposer (appelée *principe de Volterra*) consiste en ce qui suit. On aborde un problème de viscoélasticité comme un problème usuel de l'élasticité, traitant les opérateurs comme des nombres constants. La solution se représentera alors sous la forme du produit d'une fonction dépendant des constantes élastiques et des coordonnées par une fonction connue du temps. Il reste à passer des constantes élastiques aux opérateurs.

3. Sur la théorie de l'élasticité physiquement non linéaire

Pour certains matériaux, la relation entre les contraintes et les déformations est nettement non linéaire même pour de petites déformations *). Limitons-nous au cas où la relation déforma-

*) Une non-linéarité de ce genre est appelée *non-linéarité physique*, à la différence de la *non-linéarité géométrique*, quand sont prises en considération les déformations finies.

tions — contraintes peut être représentée sous la forme

$$\varepsilon_{ij} = \frac{k(\sigma)}{3K}\sigma\delta_{ij} + \frac{g(T_i^2)}{2G}(\sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}) \qquad (1)$$

où K est le module de déformation volumique; $k(\sigma)$ et $g(T_i)$, les fonctions de pression hydrostatique et d'intensité des contraintes tangentielles. En outre, conformément aux données expérimentales établissant une dépendance pratiquement linéaire entre la pression hydrostatique et la compressibilité, posons $k(\sigma) = 1$, et pour simplifier l'analyse limitons-nous au cas de

$$g(T_i^2) = 1 + gT_i^2,$$

où g = const.

Ainsi, le comportement du milieu élastique considéré sera caractérisé déjà par trois constantes. Les valeurs de ces quantités pour le cuivre, par exemple, sont :

$$K = 13{,}44 \cdot 10^{10}\mathrm{H/m^2}, \quad G = 4{,}51 \cdot 10\ \mathrm{H/m^2},$$
$$g = 0{,}18 \cdot 10^{6}G^{-2}.$$

Envisageons la résolution des problèmes plans. Pour un état de contrainte plan, de (1) découlent les relations

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G}\sigma_{ij} - \frac{3K - 2G}{6KG}\sigma\delta_{ij} - \frac{g}{2G}T_i^2(\sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}), \qquad (2)$$

avec

$$T_i^2 = \frac{2}{9}[(\sigma_x + \sigma_y)^2 + 3(\tau_{xy}^2 - \sigma_x\sigma_y)].$$

Dans le cas de déformation plane, nous obtenons de la condition $\varepsilon_z = 0$ l'égalité, négligeant les puissances T_i, supérieures à deux :

$$\sigma_z = \frac{1}{2}\left[\frac{3K - 2G}{3K - G} + \frac{9KG}{(3K + G)^2}gT_i^2\right](\sigma_x + \sigma_y). \qquad (3)$$

Transformant (1) compte tenu de (3) nous aboutissons à l'expression

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G}[\sigma_{ij} - a\sigma\delta_{ij} + gT_i^2(\sigma_{ij} - b\sigma\delta_{ij})], \qquad (4)$$

différant de (2) uniquement par la valeur des constantes, avec par ailleurs

$$T_i^2 = \frac{2}{9}[(1 + c)(\sigma_x + \sigma_y)^2 + 3(\tau_{xy}^2 - \sigma_x\sigma_y)],$$

$$a = \frac{3(3K - 2G)}{2(3K + G)}, \quad b = \frac{27K^2 + 18KG - 6G^2}{2(3K + G)^2}, \quad c = \frac{8G^2 - 6KG - 9K^2}{4(3K + G)^2}.$$

Ainsi, la résolution du problème pour un milieu élastique physiquement non linéaire se ramène à la résolution des équations d'équilibre (4.4) et des équations de compatibilité des déformations (4.6), ch. III, en tenant compte des relations (4). Il est évident que les problèmes de déformation plane et ceux d'état de contrainte plan (comme dans le cas d'un milieu élastique linéaire) peuvent être abordés des mêmes positions la différence ne se manifestant que par les valeurs des constantes.

Conformément à [128], introduisons la fonction d'Airy $U(x, y)$ à l'aide des relations (4.20), ch. III. Les équations d'équilibre seront alors identiquement vérifiées, et l'équation de compatibilité des déformations après la substitution dans celle-ci des contraintes conformément à (4) se ramènera à une équation non linéaire du quatrième ordre par rapport à la fonction d'Airy.

Réalisons le passage aux fonctions de la variable complexe. Représentons les relations (4.20), ch. III, sous la forme

$$\sigma_x + \sigma_y = 4\frac{\partial^2 U}{\partial z\,\partial \bar{z}}, \quad \sigma_x - \sigma_y + 2i\tau_{xy} = -4\frac{\partial^2 U}{\partial \bar{z}^2}. \tag{5}$$

Des relations (4) nous déduisons la représentation des composantes de déformations sous la forme

$$\begin{aligned} \varepsilon_x + \varepsilon_y &= \frac{2}{G}\left[(1-2a)\frac{\partial^2 U}{\partial z\,\partial \bar{z}} + (1-2b)gT_i^2\frac{\partial^2 U}{\partial z\,\partial \bar{z}}\right], \\ \varepsilon_x - \varepsilon_y + 2i\gamma_{xy} &= \frac{2}{G}\left(-\frac{\partial^2 U}{\partial \bar{z}^2} - gT_i^2\frac{\partial^2 U}{\partial \bar{z}^2}\right). \end{aligned} \tag{6}$$

Prenant en considération l'identité

$$2\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(u + iv) = \varepsilon_x - \varepsilon_y + 2i\gamma_{xy},$$

intégrons la seconde égalité (6), il vient

$$2G(u + iv) = -2\frac{\partial U}{\partial \bar{z}} + f(z) - 2g\int T_i^2\frac{\partial^2 U}{\partial \bar{z}^2}\,d\bar{z}, \tag{7}$$

où $f(z)$ est une fonction arbitraire de la variable complexe. Différentiant maintenant (7) par rapport à z, nous obtenons l'égalité

$$2G\frac{\partial(u + iv)}{\partial z} = -2\frac{\partial^2 U}{\partial z\,\partial \bar{z}} + f'(z) - 2g\frac{\partial}{\partial z}\int T_i^2\frac{\partial^2 U}{\partial \bar{z}^2}\,d\bar{z}. \tag{8}$$

Utilisant l'identité

$$2\frac{\partial(u + iv)}{\partial z} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

et la première égalité (6) nous ramenons (8) à la forme

$$4\frac{\partial^2 U}{\partial z\,\partial\bar z}=\sigma_x+\sigma_y=2[\varphi'(z)+\overline{\varphi'(z)}+A(z,\bar z)], \tag{9}$$

où

$$A(z,\bar z)=-\frac{g}{1-a}\operatorname{Re}\left[(1-2b)T_i^2\frac{\partial^2 U}{\partial z\,\partial\bar z}+\frac{\partial}{\partial z}\int T_i^2\frac{\partial^2 U}{\partial\bar z^2}\,d\bar z\right],$$

$$\varphi'(z)=\frac{f'(z)}{8(1-a)}\cdot$$

Nous n'avons conservé dans (9) que la partie réelle de l'égalité (8). L'intégration de (9) nous donne

$$2\frac{\partial U}{\partial\bar z}=\varphi(z)+z\overline{\varphi'(z)}+\overline{\psi(z)}+\int A(z,\bar z)\,dz, \tag{10}$$

où $\psi(z)$ est une fonction arbitraire de la variable complexe. Utilisant (7) et (10), nous obtenons la représentation des déplacements et des contraintes

$$2G(u+iv)=\varkappa\varphi(z)-z\overline{\varphi'(z)}-\overline{\psi(z)}+2B(z,\bar z),$$

$$\sigma_x-\sigma_y+2i\tau_{xy}=-2\left[z\overline{\varphi''(z)}+\overline{\psi'(z)}+\int\frac{\partial A}{\partial z}\,dz\right], \tag{11}$$

où

$$\varkappa=3-4a,\quad B(z,\bar z)=-g\int T_i^2\frac{\partial^2 U}{\partial\bar z^2}\,d\bar z-\frac{1}{2}\int A\,dz.$$

Les expressions (11) permettent la formulation des problèmes aux limites. Dans le cas du premier problème nous tirons d'emblée de (11) la condition aux limites

$$\varkappa\varphi(t)-t\overline{\varphi'(t)}-\overline{\psi(t)}=f(t). \tag{12}$$

La résolution du premier problème nécessite donc la détermination dans le domaine occupé par le corps élastique *), de deux fonctions analytiques, $\varphi(z)$ et $\psi(z)$, vérifiant la condition aux limites non linéaire (12). Dans le cas du deuxième problème les choses se compliquent quelque peu. La condition aux limites s'obtient à partir des représentations (9) et (11). Nous avons

$$\varphi(t)+t\overline{\varphi'(t)}+\overline{\psi(t)}+\int A\,dz=f(t), \tag{13}$$

*) Pour simplifier les raisonnements, on ne considère que des domaines simplement connexes.

où comme dans le cas linéaire

$$f(t) = \int_{s_0}^{s} (\sigma_{x\nu} + i\sigma_{y\nu})\, ds.$$

Les problèmes aux limites seront résolus par approximations successives. Il faut pour cela représenter les conditions (12) et (13) sous la forme

$$\varkappa\varphi^{(n)}(t) - t\overline{\varphi^{(n)\prime}(t)} - \overline{\psi^{(n)}(t)} = f(t) - 2B^{(n-1)}(t, \bar{t}), \qquad (14)$$

$$\varphi^{(n)}(t) + t\overline{\varphi^{(n')}(t)} + \overline{\psi^{(n)}(t)} = f(t) - \int A^{(n-1)} dz. \qquad (15)$$

Ainsi, le problème aux limites non linéaire se ramène à un ensemble de problèmes linéaires. En première approximation on néglige les intégrales dans les seconds membres et l'on résout un problème linéaire. On calcule ensuite les corrections à apporter au second membre et l'on réitère la résolution du problème linéaire, et ainsi de suite.

Dans [128], on résout par cette méthode plusieurs problèmes où il s'agit de déterminer la concentration des contraintes autour d'ouvertures.

4. Méthode des solutions élastiques en théorie des petites déformations élastoplastiques

Exposons la méthode des « solutions élastiques » [41], appliquée à la résolution des problèmes de la plasticité dans le cadre de la théorie des petites déformations élastoplastiques.

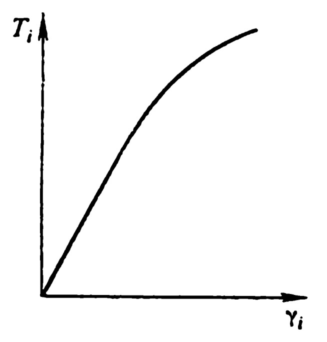


Fig. 104. Courbe de durcissement.

Les principes de base de cette théorie sont les suivants. Soient, comme auparavant, σ_{ij} les composantes du tenseur des contraintes et ε_{ij} les composantes du tenseur des déformations et soit entre les déformations et les contraintes la relation

$$\varepsilon_{ii} - \varepsilon = \frac{\psi(\gamma)}{2G}(\sigma_{ii} - \sigma),$$
$$\varepsilon_{ij} = \frac{\psi(\gamma)}{G}\sigma_{ij} \quad (i \neq j). \qquad (1)$$

Ici $\varepsilon = e_{ii}$, $\sigma = 1/3\ \sigma_{ii}$, $\psi(\gamma)$ est une certaine fonction expérimentale (fig. 104),

$$\gamma = \sqrt{1/3}\times$$
$$\times\sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + 1/3(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)}.$$

Le facteur figurant dans ces équations est choisi de façon à ce que le cas de $\psi = 1$ corresponde à un milieu élastique. Notons qu'entre ε et σ existe la même relation que pour le milieu élastique :

$$\varepsilon = \frac{3(1-2\nu)}{E}\sigma. \tag{2}$$

Transformons la relation (1) en vue d'exprimer les contraintes uniquement par les déformations :

$$\begin{aligned} \sigma_{ii} &= \left(\frac{E}{1-2\nu} - \frac{2G}{\psi}\right)\varepsilon + \frac{2G}{\psi}\varepsilon_{ii}, \\ \sigma_{ij} &= \frac{G}{\psi}\varepsilon_{ij} \quad (i \neq j). \end{aligned} \tag{3}$$

Au problème aux limites de la plasticité mettons en correspondance le problème aux limites de l'élasticité pour le domaine occupé par le corps initial *). Exigeons par ailleurs que les déplacements (et par conséquent les déformations) soient les mêmes pour les deux problèmes. Montrons qu'une telle approche est possible. Notons les contraintes dans le milieu élastique σ_{ij}^* et donnons l'expression de la loi de Hooke sous la forme

$$\begin{aligned} \sigma_{ii}^* &= \left(\frac{E}{1-2\nu} - 2G\right)\varepsilon + 2G\varepsilon_{ii}, \\ \sigma_{ij}^* &= G\varepsilon_{ij} \quad (i \neq j). \end{aligned} \tag{4}$$

De (3) et (4) nous tirons les expressions des différences des composantes $\sigma_{ij}^0 = \sigma_{ij}^* - \sigma_{ij}$:

$$\begin{aligned} \sigma_{ii}^0 &= 2G\left(1 - \frac{1}{\psi}\right)(\varepsilon_{ii} - \varepsilon), \\ \sigma_{ij}^0 &= G\left(1 - \frac{1}{\psi}\right)\varepsilon_{ij} \quad (i \neq j). \end{aligned} \tag{5}$$

Passant dans le second membre aux contraintes élastiques, nous obtenons

$$\sigma_{ii}^0 = \left(1 - \frac{1}{\psi}\right)(\sigma_{ii}^* - \sigma^*), \quad \sigma_{ij}^0 = \left(1 - \frac{1}{\psi}\right)\sigma_{ij}^*. \tag{6}$$

*) Pour la théorie de la plasticité considérée ici, la position des problèmes aux limites est la même que dans la théorie de l'élasticité.

L'astérisque sur σ peut être omis en vertu de (2). Les composantes des contraintes σ_{ij} s'expriment au moyen des contraintes pour le problème auxiliaire de la façon suivante :

$$\sigma_{ii} = \frac{1}{\psi}\sigma_{ii}^{*} + \left(1 - \frac{1}{\psi}\right)\sigma, \quad \sigma_{ij} = \frac{1}{\psi}\sigma_{ij}^{*}. \tag{7}$$

On peut montrer que des relations analogues ont lieu pour les intensités des contraintes τ :

$$\tau = \tau^{*} - \tau^{0}, \quad \tau^{0} = G\left(1 - \frac{1}{\psi}\right)\gamma, \quad \tau = \frac{1}{\psi}\tau^{*}. \tag{8}$$

Portant maintenant dans les équations d'équilibre pour les composantes leurs représentations (7), nous obtenons :

$$\sigma_{ij,i}^{*} + P_j = 0, \quad P_j = -\sigma_{ij,i}^{0}. \tag{9}$$

Il est évident qu'on peut interpréter les termes P_j en tant que forces massiques fictives.

Explicitons la force P_1 :

$$P_1 = -\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[2G\left(1 - \frac{1}{\psi}\right)(\varepsilon_x - \varepsilon_y)\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial y}\left[G\left(1 - \frac{1}{\psi}\right)\gamma_{yx}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[G\left(1 - \frac{1}{\psi}\right)\gamma_{zx}\right]\right\}, \tag{10}$$

ou encore

$$P_1 = -\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(1 - \frac{1}{\psi}\right)(\sigma_x^{*} - \sigma)\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial y}\left[\left(1 - \frac{1}{\psi}\right)\tau_{yx}^{*}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\left(1 - \frac{1}{\psi}\right)\tau_{zx}^{*}\right]\right\}. \tag{11}$$

On a donc établi que dans le problème élastique auxiliaire doivent figurer complémentairement des forces de masse *).

Voyons qu'en est-il des conditions aux limites. Sur la partie de la surface où sont donnés les déplacements les conditions aux limites ne changent pas par hypothèse, tandis que sur la partie de la surface où sont données les contraintes il est nécessaire d'introduire des forces surfaciques complémentaires $\sigma_{\nu i}^{0}$ qu'on tire des égalités (7).

---

*) Si des forces massiques figurent déjà dans le problème étudié, il faut les ajouter aux forces massiques fictives du problème auxiliaire.

Nous ne donnerons l'expression que d'une seule composante (les autres s'écrivant de façon analogue) :

$$\sigma_{vx}^{0} = 2G\left(1 - \frac{1}{\psi}\right)\left[(\varepsilon_x - \varepsilon)l + \frac{1}{2}\gamma_{xy}m + \frac{1}{2}\gamma_{yz}n\right], \qquad (12)$$

où

$$\sigma_{vx}^{0} = \left(1 - \frac{1}{\psi}\right)\left[(\sigma_x^* - \sigma)l + \tau_{xy}^* m + \tau_{xz}^* n\right]. \qquad (12')$$

Par passage à un milieu élastique auxiliaire nous avons en principe terminé la position du problème. Cependant sa résolution effective se ramène à celle d'un système non linéaire d'équations différentielles.

Nous allons résoudre ce système par la méthode des approximations successives. On commence par résoudre le problème de l'élasticité linéaire en l'absence de forces massiques et surfaciques complémentaires (première approximation). D'après les valeurs obtenues des déformations on détermine les valeurs de la fonction ψ, ce qui permet de trouver les forces massiques complémentaires (seconde approximation) conformément à (10) et les forces surfaciques (seconde approximation) conformément à (12). Puis on résout à nouveau le problème de l'élasticité, mais cette fois avec des forces massiques et des forces surfaciques modifiées : on calcule les déformations, la fonction ψ et ainsi de suite. On a démontré [163] que pour certaines conditions ($\psi'(\gamma) > 0$) et une régularité suffisante de la fonction $\psi(\gamma)$ le processus des approximations successives converge.

La réalisation numérique de la méthode des solutions élastiques appelle une suggestion. Comme la force massique est donnée par ses valeurs aux points discrets, il est commode d'utiliser l'appareil des potentiels élastiques généralisés (cf. § 1, ch. III). Dans cette approche, on voit apparaître, sur la surface, des contraintes qu'il faut annuler (afin d'obtenir en fait une solution particulière de l'équation non homogène avec des conditions aux limites nulles). Il faut donc prévoir dans l'algorithme encore une étape qui consiste à calculer ces contraintes et les porter (avec le signe contraire) dans la condition aux limites pour l'itération qui suit.

Le processus des solutions élastiques terminé, il n'y a aucune difficulté à déterminer l'état de contrainte à un point quelconque du corps. Pour cela on calculera les déformations (celles du milieu élastique auxiliaire) et on déduira les contraintes des relations (3). Comme le plus souvent les programmes d'ordinateur ne permettent de déterminer que les contraintes et non les déformations, aussi calculera-t-on dans le milieu élastique les contraintes et passera-t-on aux contraintes réelles à l'aide des formules (7).

BIBLIOGRAPHIE

1. Alexandrov A. Ya. — DAN SSSR, **208**, 2, 1973.
2. Alexandrov A. Ya., Soloviev Yu. I. — *Problèmes tridimensionnels de l'élasticité*. M., « Naouka », 1978 (en russe).
3. Alexandrov V. M., Vorovitch I. I. — PMM, **24**, 1, 1960.
4. Alexéeva E. G., Perline P. I., Sternchis A. Z. — *In* : « Troudy » de l'Institut du bâtiment, **188**, 1982.
5. Alpérine I. G. — *In* : Etudes de l'Institut des mathématiques et de la mécanique près l'Université de Kharkov, XX, sér. 4, 1950.
6. Altiero N. J., Gavazza S. D. — Appl. Math. Model., **3**, 2, 1979.
7. Arjanykh I. S. — UMN, **4**, 5, 1949.
8. Aroutiounian N. Kh., Abramian B. L. — *Torsion des corps élastiques*. M., « Fizmatguiz », 1963 (en russe).
9. Babloian A. A. — PMM, **31**, 4, 1967.
10. Bacheleichvili M. O., Guéguélia T. G. — DAN SSSR, **160**, 1, 1965.
11. Bateman H., Erdélyi A. — *Higher transcendental functions*. N. Y., McGraw-Hill, 1955.
12. Bondaréva V. F. — PMM, **33**, 6, 1969.
13. Bondaréva V. F. — Problème de contact pour une boule. *In* : *Développement de la théorie des problèmes de contact en URSS*. M., « Naouka », 1976 (en russe).
14. Bourtchouladze T. V. — Problèmes aux limites pour les domaines multiplement connexes. *In* : « Troudy » de l'Université de Tbilissi, **129**, 1968.
15. Chafarenko E. M. — MTT, **4**, 1979.
16. Chafarenko E. M., Sternchis A. Z. — Méthodes d'augmentation de l'efficacité de résolution des équations intégrales de problèmes tridimensionnels de l'élasticité. *In* : Thèses de la conférence fédérale sur l'élasticité. Erévan, éd. : Académie des sci. de la R.S.S. de l'Arménie, 1979.
17. Corr R. B., Jennings A. — Int. J. Numer. Methods Eng., **10**, 3, 1976.
18. Courant P. — *Partial differential equations*. N. Y.-London, Intersci. Publ., 1962.
19. Courant P., Hilbert D. — *Methods of Mathematical Physics*. Berlin, Springer Verl., 1924.
20. Cruse T. A. — Int. J. Solids and Struct., **5**, 12, 1969.
21. Cruse T. A. — Int. J. Comp. and Struct., **4**, 4, 1974.
22. Danilevski A. M. — *In* : Etudes de l'Institut des mathématiques et de la mécanique près l'Université de Kharkov, **13**, 1, sér. 14, 1936.
23. Danson D. J. — *In* : Boundary Elem. Meth. Proc. 3-rd Int. Semin., Irvine. Calif., 1981, Berlin, 1981.
24. De Hoop A. T. — Appl. Sci. Res., Sec. B, **8**, 1952.
25. Dovnorovitch V. I. — *Problèmes de contact tridimensionnels de l'élasticité*. Minsk, BGU, 1959 (en russe).
26. Efimov A. B., Vorobiev V. N. — Sur la résolution de quelques problèmes spatiaux de l'élasticité. *In* : Comptes rendus de la III-e Conférence fédérale sur les

méthodes numériques de résolution des problèmes de l'élasticité et de la plasticité. 1-re partie. Novossibirsk, filiale sib. de l'Acad. des sci. de l'U.R.S.S., 1974.
27. Eidus D. M. — DAN SSSR, **76**, 2, 1956.
28. Fillipov A. F. — PMM, **28**, 2, 1964.
29. Filonenko-Boroditch M. M. — *Cours de théorie de l'élasticité*. M., « Fizmatguiz », 1959 (en russe).
30. Flitman L. M. — PMM, **23**, 4, 1959.
31. Forsythe G. E., Malcolm M. A., Moler C. B. — *Computer method for mathematical computations*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., 07632, 1977.
32. Fracture taughness testing and its applications. — Symp. 67th Annual Meeting Amer. Sor. Test. Materials. Chicago, ASTM, 1964.
33. Friedlander F. G. — *Sond Pulses*. Cambridge Univ. Press, 1958.
34. Friedrichs K. — Ann. Math., **48**, 2, 1947.
35. Gradsteyn I. S., Ryzhik I. M. — *Table of integrals, series and products*. N. Y., Acad. Press, 1979.
36. Grinberg G. A. — *Questions choisies de théorie mathématique des phénomènes électriques et magnétiques*. M., « Gostekhizdat », 1948 (en russe).
37. Hobson E. — *The theory of spherical and ellipsoidal harmonics*. Cambridge Univ. Press, 1931.
38. Horvay G. — J. Appl. Mech., **20**, 1, 1953.
39. Horvay G., Born J. S. — J. Math. and Phys., **33**, 4, 1955.
40. Hussain M. A., Pu S. L. — Int. J. Eng. Fract. Mech., **4**, 4, 1972.
41. Iliouchine A. A. — *La plasticité*. M., « Gostekhizdat », 1948 (en russe).
42. Kakhniachvili N. S. — Etude des problèmes plans de l'élasticité par la méthode du potentiel. *In* : « Troudy » de l'Université de Tbilissi, éd. : Univ. de Tbilissi, 1953 (en russe).
43. Kantorovitch L. V., Krylov B. I. — *Méthodes approchées d'Analyse*. M., « Fizmatguiz », 1962 (en russe).
44. Khatsirévitch I. Kh. — PMM, **6**, 2, 1946.
45. Khoutoriansky N. M. — La méthode des potentiels généralisés retardés et des équations intégrales dans les problèmes dynamiques non stationnaires de l'élasticité. *In* : *Problèmes appliqués de la résistance et de la plasticité*. Op. 9. Gorki, éd. : Univ. de Gorki, 1978 (en russe).
46. Ko W. L., Karlsson T. — Trans. ASME, ser. E, **4**. 1967.
47. Koiter W. T. — Proc. Koninkl. Nederl. Akad. Wetenschappen. ser. B, **57**, 5, 1954.
48. Kolossov G. V. — *Application de la variable complexe à la théorie de l'élasticité* M.-L., ONTI, 1935 (en russe).
49. Kopeikine Yu. D. — Mécanique appliquée, **1**, 5, 1965.
50. Kopeikine Yu. D. — Mécanique appliquée, **1**, 2, 1965.
51. Kopeikine Yu. D. — Méthodes numériques de la mécanique des milieux continus, **5**, 2, 1974.
52. Kopeikine Yu. D., Khvisévitch V. M. — *In* : « Troudy » de l'Institut du bâtiment, **188**, 1982.
53. Kosmodamianski A. S. — *Problème plan de l'élasticité pour des plaques comportant des trous et saillies*. Kiev, « Vychtcha schkola », 1975 (en russe).
54. Kostrov B. V. — PMM, **38**, 3, 1974.
55. Kostrov B. V. — PMM, **28**, 4, 1964.
56. Kostrov B. V. — PMM, **30**, 1, 1966.
57. Kostrov B. V., Nikitine L. V., Flitman L. M. — MTT, **3**, 1969.
58. Kostylev V. G., Andrianov N. F. — Méthodes numériques de la mécanique des milieux continus, **9**, 5, 1978.
59. Koublanovskaïa V. N. — Prolongement analytique et changement de variables en analyse numérique. *In* : « Troudy » de l'Institut mathématique Steklov, **53**. M., « Akademizdat », 1959 (en russe).
60. Koudriavtsev B. A., Parton V. Z. — PMM, **37**, 2, 1973.
61. Koudriavtsev B. A., Parton V. Z., Peskov Yu. A. — MTT, **2**, 1969.

62. Koukoudjanov V. N. — Résolution numérique de problèmes multidimensionnels de propagation des ondes des contraintes dans les solides. *In* : Rapport sur les math. appl., **6**. M., Centre de calcul de l'Acad. des sci. de l'URSS, 1976 (en russe).
63. Koukoudjanov V. N. — Sur la résolution numérique de problèmes de propagation d'ondes élasto-viscoplastiques. *In* : *Propagation d'ondes élastiques et élasto-plastiques*. Alma-Ata, « Naouka », 1973 (en russe).
64. Koukoudjanov V. N. — Solution asymptotique d'équations précisées d'ondes élastiques et élasto-plastiques dans les barres. *In* : *Ondes dans des milieux non élastiques*. Kichinev, éd. : Acad. des sci. de Moldavie, 1977 (en russe).
65. Kourdine N. S., Kotchetkov P. A. — *In* : *Théorie de l'élasticité appliquée*. Saratov, éd. : Institut polytechnique de Saratov, 1982.
66. Kournossov N. V., Likhovtsev V. M. — Solution de problèmes de l'élasticité pour des corps délimités par des surfaces ouvertes. *In* : Mécanique du solide déformable et problèmes apparentés d'analyse. M., éd. : Institut de constructions pour l'industrie chimique, 1978 (en russe).
67. Kournossov N. V. — MTT, **3**, 1983.
68. Kovchov A. N. — MTT, **2**, 1979.
69. Krassiltchikova E. A. — *Aile d'envergure finie dans un flux compressible*. M., « Naouka », 1978 (en russe).
70. Kravtchouk A. S. — PMM, **41**, 1, 1977.
71. Kravtchouk A. S. — PMM, **43**, 5, 1979.
72. Kupradze V. D. — UMN, **8**, 3 (55), 1953.
73. Kupradze V. D. — *Potentiel methods in the theory of elasticity*. Programme of scientific translations. Jérusalem, 1965.
74. Kupradze V. D., Bourtchouladze T. V. — *Problèmes dynamiques de l'élasticité et de la thermoélasticité. Bilan des sciences et de la technique. Problèmes actuels des mathématiques*, tome 7. M., VINITI, 1975 (en russe).
75. Kupradze V. D., Gegelia T. G., Basheleishvili M. O., Burchuladze T. V. — *Three-dimensional problems of the mathematical theory of elasticity and thermo-elasticity*. North-Holland, Amsterdam, 1979.
76. Kupradze V. D., Alexidze M. A. — Journ. des math. numér. et phys. math., **4**, 4, 1961.
77. Lachat J. C., Watson J. O. — ASME Appl. Mech. Conf. N.Y., 1975.
78. Lankaster P. — *Theory of matrices*. N. Y., Acad. Press, 1969.
79. Lasarev M. I., Kourbatov A. V. — MTT, **1**, 1980.
80. Lasarev M. I., Perline P. I. — MTT, **6**, 1979.
81. Léonov M. Ya. — PMM, **3**, 9, 1939.
82. Libatski L.L. — Mécanique physico-chimique des matériaux, **1**, 4, 1965.
83. Likhovtsev V. M., Perline P. I. — Résolution des problèmes tridimensionnels de l'élasticité pour des domaines semi-infinis. *In* : *Théorie des fonctions, mathématiques et mécanique appliquées*. « Troudy » de l'Institut de constructions pour l'industrie chimique, **65**, M., 1975.
84. Likhovtsev V. M., Perline P. I. — MTT, **1**, 1978.
85. Loeber J. F., Sih G. C. — J. Acoust. Soc. Amer., **44**, 1, 1968.
86. Lurje A. I. — *Räumliche Probleme der Elastizitätstheorie*. Berlin, Akad. Verl., 1963.
87. Love A.E.H. — *A treatise on the mathematical theory of elasticity*. Cambridge Univ. Press, 1906.
88. Markushevich A.I. — *The theory of analytical functions*. Englewood Cliffs N.J., Prentice Hall, 1965.
89. Martynenko M. D., Romantchik V. S. — Sur une méthode de résolution de l'équation intégrale fondamentale du problème de contact de l'élasticité. Courier Acad. sci. de Bélorussie, sér. phys.-math., **3**, 1974.
90. McLachlan N.W. — *Theory and application of Mathieu functions*. Oxford, Clarendon Press, 1974.

91. MIKHLINE S.G. — *Méthodes directes en physique mathématique.* M., « Gostekhizdat », 1950 (en russe).
92. MIKHLINE S. G. — *Intégrales singulières multidimensionnelles et équations intégrales.* M., « Fizmatguiz », 1962 (en russe).
93. MIKHLINE S. G. — *Problème du minimum de la fonctionnelle quadratique.* M., « Gostekhizdat », 1952 (en russe).
94. MITKÉVITCH N. M. — Application de la méthode de Ritz au problème de flexion d'une dalle encastrée. *In* : « Troudy » du Laboratoire des machines hydrauliques de l'Acad. des sci. de l'Ukraine, op. 9. Kiev, éd. : Acad. des sci. de l'Ukraine, 1961 (en russe).
95. MUSKHELISHVILI N. I. — *Some basic problems in the mathematical theory of elasticity.* Groningen, P. Noordhoff, 1953.
96. NAÏSTUT YU. S. — MTT, 1, 1970.
97. NEUBER H. — *Kerbspannungslehre.* Berlin, Springer Verl., 1937.
98. NIKITIN L. V., ODINTSEV V. N. — Arch. Mech. Stosow., 25, 2, 1973.
99. OBOLACHVILI E. I. — *Transformation de Fourier et ses applications en théorie de l'élasticité.* Tbilissi, « Metsniereba », 1979 (en russe).
100. ODQWIST F.K.G. — Math. Zeit., Bd. 32, H. 3, 1930.
101. PANASSIOUK V. V., SAVROUK M. P., DATSYCHINE A. P. — *Distribution des contraintes autour des fissures dans les plaques et enveloppes.* Kiev, « Naoukova doumka ». 1976 (en russe).
102. PARTON V. Z. — Un problème de l'électro-élasticité. *In* : *Mécanique du solide déformable et problèmes apparentés d'analyse.* M., éd. : Institut de constructions pour l'industrie chimique, 1980.
103. PARTON V. Z., KOUDRIAVTSEV B.A. — DAN SSSR, 185, 3, 1969.
104. PARTON V. Z., KOUDRIAVTSEV B. A. — Problème dynamique de mécanique de rupture pour un plan comportant une pièce d'insertion. *In* : *Mécanique des corps et des constructions déformables.* M., « Machinostroïenie », 1975 (en russe).
105. PARTON V. Z., MOROZOV E. M. — *Elastic-plastic fracture mechanics.* Moscow, Mir Publishers, 1978.
106. PARTON V. Z., PERLINE P. I. — Equations intégrales de problèmes fondamentaux tridimensionnels et plans de l'équilibre élastique. Bilan des sciences et de la technique. Mécanique du solide déformable, tome 8. M., VINITI, 1975 (en russe).
107. PERLINE P. I. — Sur les propriétés des systèmes d'équations infinis dans les problèmes de l'élasticité pour des corps biconnexes. *In* : *Etudes sur la mécanique et mathématiques appliquées.* « Troudy » de l'Institut physico-technique, 5. M., « Oboronguiz », 1960.
108. PERLINE P. I. — Journ. d'ingénieurs, 4, 1, 1961.
109. PERLINE P. I. — Sur une méthode de calcul d'intégrales singulières bidimensionnelles ... *In* : *Ecole d'étude théorique des méthodes numériques de la mécanique des milieux continus.* Zvénigorod. Thèses de rapports. M., éd. : Institut des problèmes de la mécanique de l'Acad. des sci. de l'URSS, 1973 (en russe).
110. PERLINE P. I. — PMM, 2, 1976.
111. PERLINE P. I., CHAFARENKO E. M., STERNCHIS A. Z. — *In* : *Problèmes actuels de mécanique et d'aviation.* M., « Machinostroénie », 1982 (en russe).
112. PERLINE P. I., CHALIOUKHINE YU. N. — « *Izvestia* » de l'Acad. des sci. du Kazakhstan, sér. physico-math. 1, 1976.
113. PERLINE P. I., NOVIKOV A. V. — *In* : *Mécanique du solide déformable et problèmes apparentés d'analyse.* M., éd. : Institut de constructions pour l'industrie chimique, 1980.
114. PERLINE P. I., NOVIKOV A. V., STOUPAK S. F. — Application de la méthode des potentiels à la résolution de problèmes tridimensionnels de l'élasticité pour un milieu incompressible. *In* : *Statique des constructions.* Kiev, 1978.
115. PERLINE P. I., SAMAROV V. N. — Application de la théorie du potentiel à la résolution de problèmes tridimensionnels de l'élasticité pour des corps présu-

tant des coupures. *In* : Problèmes appliqués de la résistance et de la plasticité. Op. 6, Gorki, éd. : Université de Gorki, 1977 (en russe).
116. PHAM THE LAI — J. méc., **6**, 12, 1967.
117. PLEIJEL A. — Arkiv math., astr. och fysik, **27A**, 13, 1940.
118. POLOJI G. — *Théorie et application des fonctions P- et (P, Q)-analytiques*. Kiev, « Naoukova doumka », 1973 (en russe).
119. POLOUKHINE V. P., ANDRIANOV N. F., NOVIKOV N. V., POPOVA E. V. — « Izvestia » des Ecoles supérieures. Sidérurgie. **3**, 1980.
120. POLOUKHINE V. P., KOSTYLEV V. G., ANDRIANOV N. F. — « Izvestia » des Ecoles supérieures. Constructions mécaniques. **11**, 1980.
121. POROUTCHIKOV V. B. — PMM, **42**, 5, 1978.
122. ROITFARB I. Z., CHU VIET KYONG — Méthode numérique de résolution des problèmes tridimensionnels dynamiques de l'élasticité par la méthode du potentiel. *In* : *Résistance des matériaux et théorie des constructions*, XXIX. Kiev, « Boudivelnik », 1976 (en russe).
123. ROSLIAKOV G. S., SOUKHOROUKOV V. P. — Application du lissage au calcul des flux discontinus. *In* : *Méthodes numériques et programmation*. M., éd. : Univ. de Moscou, 1970 (en russe).
124. ROUBENTCHIK V. YA. — Equations intégrales du problème plan de l'élasticité. *In* : *Mécanique théorique et appliquée*. Minsk, éd. : Inst. péd. de Bélorussie, 1973 (en russe).
125. RVATCHEV V. L. — PMM, **23**, 1, 1969.
126. RVATCHEV V. L. — *Méthodes de l'algèbre de la logique en physique mathématique*. Kiev, « Naoukova doumka », 1974 (en russe).
127. SAMAROV V. N. — *In* : Problèmes appliqués de la résistance et de la plasticité, **1**, 1978.
128. SAVINE G. N. — *Distribution des contraintes dans le voisinage des trous*. Kiev, « Naoukova doumka », 1968 (en russe).
129. SAVROUK M. P. — *Problèmes plans de l'élasticité pour des corps présentant des fissures*. Kiev, « Naoukova doumka », 1976 (en russe).
130. SHERMAN D. I. — Problème plan de l'élasticité aux conditions aux limites mixtes. « Troudy » de l'Institut sismique, 88. M.-L., éd. : Acad. des sci. de l'URSS, 1938 (en russe).
131. SHERMAN D. I. — DAN SSSR, **27**, 9, 1940.
132. SHERMAN D. I. — DAN SSSR, **28**, 1, 1940.
133. SHERMAN D. I. — Problème mixte de l'élasticité statique pour des domaines plans multiplement connexes. DAN SSSR, **28**, 1, 1940.
134. SHERMAN D. I. — Torsion d'un cylindre circulaire armé d'un arbre elliptique. Ing. sbornik, XXI. M., « Akademizdat », 1955 (en russe).
135. SHERMAN D. I. — Problèmes plans statiques de l'élasticité. « Troudy » de l'Institut mathématique de Tbilissi, II. Tbilissi, éd. : Acad. des sci. de la Géorgie, 1937 (en russe).
136. SHERMAN D. I. — PM, t. III, 4, 1957.
137. SHINDO Y. — Bull. Aerodynam. Pol. Sci., ser. techn., **26**, 4, 1978.
138. SIH G. C., LOEBER J. F. — Quart. Appl. Math., **27**, 2, 1969.
139. SIH G. C., LOEBER J. F. — Trans. ASME, ser. E, **37**, 2, 1970.
140. SKOBÉEV A. M. Mech. et Phys. techn., **3**, 1972.
141. SMIRNOV V. I. — *Cours de mathématiques supérieures*, t. 1. Moscou, Ed. Mir, 1969.
142. SNEDDON I. N. — *Fourier transformation*. N. Y., McGraw-Hill, 1951.
143. SNEDDON I. N., TAIT R. J. — Int. J. Eng. Sci., **1**, 3, 1969.
144. SOBOLEV S. L. — Quelques questions de la théorie de propagation des oscillations, *In* : FRANK F., MISEC R. — *Equations différentielles et intégrales de physique mathématique*. M., ONTI, 1937 (en russe).
145. SOBOLEV S. L., MOUKHINA G. V. — L'énergie atomique, **5**, 2, 1958.
146. SRÉTENSKI L. N. — *Théorie du potentiel newtonien*. M., « Gostekhizdat », 1950 (en russe).

147. SRIVASTAV R. P. — Proc. Roy. Soc. Edinburg, ser. A, **66**, 111, 1962-63.
148. STERNBERG E., KOITER W. T. — J. Appl. Mech., **25**, 4, 1958.
149. STOUPAK S. F. — Sur la résolution de problèmes tridimensionnels de l'élasticité. *In* : *Mécanique du solide déformable et problèmes apparentés de l'analyse*. M., éd. : Institut de constructions pour l'industrie chimique, 1978 (en russe).
150. SUHUBE E. S. — Int. J. Eng. Sci., **2**, 5, 1965.
151. TIKHONOV A. N., ARSÉNINE B. YA. — *Méthodes de résolution de problèmes mal posés*. M., Ed. Mir, 1977.
152. TIKHONOV A. N., SAMARSKI A. A. — *Equations de physique mathématique*. M., « Naouka », 1977 (en russe).
153. TIMOSHENKO S. P., GOODIER J. N. — *Theory of elasticity*. N. Y., McGraw-Hill, 1970.
154. TITCHMARSH E. C. — *Introduction to the theory of Fourier integrals*. Oxford, Clarendon Press, 1948.
155. TSYRLINE L. E. — *Problèmes choisis de calcul des champs électriques et magnétiques*. M., « Naouka », 1977 (en russe).
156. UFLAND YA. S. — *Transformations intégrales dans les problèmes de l'élasticité*. M.-L., « Naouka », 1967 (en russe).
157. UFLAND YA. S. — *Méthode des équations duales dans les problèmes de physique mathématique*. M.-L., « Naouka », 1977 (en russe).
158. VÉKUA N. P. — *Systèmes d'équations intégrales singulières et quelques problèmes aux limites*. M., « Gostekhizdat », 1950 (en russe).
159. VÉRIOUJSKI YU. V. — *Méthodes numériques du potentiel dans des problèmes de mécanique appliquée*. Kiev, « Vychtcha chkola », 1978 (en russe).
160. VICHIK M. I., ESKINE G. I. — J. math. de Sibérie, **IX**, 5, 1968.
161. VIGDERHAUZ S. V. — PMM, **38**, 5, 1974.
162. VOÉVODINE V. V. — *Eléments de calcul numérique en algèbre linéaire*. M., Ed. « Mir », 1980.
163. VOROVITCH I. I., KRASSOVSKI YU. P. — DAN SSSR, **126**, 4, 1959.
164. ZARGARIAN S. S., ENFIADJAN R. L. — DAN de l'Arménie, **54**, 3, 1972.
165. ZAPPAROV K. I., PERLINE P. I. — *Mécanique appliquée*, **XII**, 3, 1976.
166. ZINOVIEV B. M. — Une méthode approchée de calcul de corps présentant des coupures. *In* : *Mécanique du solide déformable et calcul des constructions*. « Troudy » de l'Institut des chemins de fer de Novossibirsk, **137**. Novossibirsk, 1972 (en russe).

INDEX ALPHABÉTIQUE DES MATIÈRES

INDEX DES AUTEURS CITÉS

À NOS LECTEURS

Les Editions Mir seraient très reconnaissantes de bien vouloir leur communiquer votre opinion sur le contenu de ce livre, sa traduction et sa présentation, ainsi que toute autre suggestion.

Ecrire à l'adresse : 1er Rijski péréoulok, 2,
Moscou. I-110. GSP

Imprimé en Roumanie